Beziehungen

zwischen

der Sylvester'schen und der Bézout'schen Determinante.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

an der

Universität Erlangen

von

Harry W. Tyler
aus Ipswich.

MÜNCHEN
Akademische Buchdruckerei von F. Straub
1891.

Beziehungen

zwischen

der Sylvester'schen und der Bézout'schen Determinante.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

an der

Universität Erlangen

von

Harry W. Tyler
aus Ipswich.

MÜNCHEN
Akademische Buchdruckerei von F. Straub
1891.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535708_0295

Vorwort.

Die folgende Arbeit bezieht sich auf einige Kapitel der Determinantentheorie, wie dieselbe insbesondere in den Vorlesungen des Herrn Prof. Gordan dargestellt ist.

Sie zerfällt in zwei Hauptteile, einen allgemeinen und einen speciellen. Im ersteren, im ersten Kapitel nämlich, wird das Gewicht im Gegensatz zu der gewöhnlichen Darstellung nicht auf Determinanten, sondern vielmehr auf Matrices im Allgemeinen gelegt. Dabei ist nicht die Absicht, eine einheitliche Matrixtheorie zu geben, sondern vielmehr verschiedene, besonders wichtige teilweise bekannte Sätze hervorzuheben und mit einander in Verbindung zu setzen. Im speciellen Teil, also in den folgenden vier Kapiteln, wird die Anwendung der allgemeinen Sätze nach einer besonderen Richtung gezeigt, nämlich in der Ableitung gewisser Eigenschaften derjenigen Determinanten, welche von Bézout, beziehungsweise von Sylvester als Resultanten zweier Gleichungen desselben Grades aufgestellt worden sind. Dabei wird aber von dieser Beziehung der in Betracht kommenden Determinanten zu der Gleichungstheorie völlig abgesehen. Schon für sich als Determinanten betrachtet, beanspruchen die beiden Resultanten besonderes Interesse.

Ausserdem sind sie von dem anderen Gesichtspunkt, d. h. als Resultanten so vielfach und von so bedeutenden Mathematikern behandelt worden, dass wenig mehr in dieser Hinsicht zu wünschen wäre. Man ist selbstverständlich auf gewisse Eigenschaften der betreffenden Determinanten als solcher ge-

kommen; so z. B. Jacobi, und in neuerer Zeit Mansion und Netto. So gut die Methoden dieser Mathematiker ihren Zwecken entsprechen mögen, so gewinnt man doch, wenn man seine Aufmerksamkeit auf diese Determinanten selbst statt auf irgend welche Anwendungen derselben richtet, eine tiefere Einsicht in ihr Wesen und ihre Beziehungen zu einander.

Für nähere Auskunft über die behandelten Gegenstände mag auf das Inhaltsverzeichnis hingewiesen werden, während die wichtigsten Resultate in den Einleitungen der einzelnen Kapitel sowie in den nummerirten Lehrsätzen ausgesprochen sind.

Herrn Prof. Gordan verdanke ich nicht nur die Anregung zu dieser Arbeit, sondern auch den mannigfachsten und nützlichsten Rat bei der Entwickelung derselben.

Für wertvolle Angaben über die einschlägige Literatur bin ich Herrn Prof. Noether verpflichtet.

Erstes Kapitel.

Beziehungen zwischen Systemen linearer Gleichungen und Matrices.

1. Einleitung.

Es werden in diesem Kapitel einige Lehrsätze der allgemeinen Determinantentheorie in einer für die späteren Anwendungen geeigneten Form aufgeführt. Da die betreffenden Sätze zum grossen Teil schon bekannt sind, geben wir nur solche Beweise, welche mehr oder weniger von der gewöhnlichen Darstellung abweichen. Die entwickelten Theoreme beziehen sich im Allgemeinen auf Matrices, umfassen also den Fall von Determinanten als eine Specialisierung.

Unter den einzelnen Gegenständen erwähnen wir insbesondere: die Correspondenz zwischen Matrices, die Multiplication von Matrices, die Darstellung der Unterdeterminanten einer Determinante, welche durch Multiplication zweier Matrices entsteht, ebenfalls als Producte, eine specielle Darstellung des Productes zweier Matrices als Determinante.

Der Begriff der Correspondenz von Matrices ist zuerst von Brill, nach seiner Angabe in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, März 1889, aufgestellt worden. Jedoch scheint man nicht überall die Wichtigkeit dieser Beziehung erkannt zu haben.

Der Zusammenhang zwischen Elimination bei linearen Gleichungen und Correspondenz von Matrices ist schon von Cayley [1]) bemerkt worden, obwohl er die Correspondenz nicht betont. Er zeigt nämlich, dass, wenn man durch lineare Verbindung von linearen Gleichungen eine Anzahl von Unbekannten eliminiert und dann die Matrix der Coefficienten der eliminierten Glieder und die Matrix der Coefficienten der linearen Verbindung mit einander vergleicht, die Determinanten dieser beiden Matrices bei richtiger Zuordnung bis auf's Vorzeichen einander proportional sind.

Für einige Sätze, die wir ohne Beweis anführen, verweisen wir auf die allgemein bekannten Lehrbücher von Baltzer (Theorie und Anwendung der Determinanten, 4. Aufl.) und von Gordan (Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. I. Determinanten).

2. Voraussetzungen und Bezeichnung.

Eine Matrix enthält andere Matrices, welche durch Auslassung beliebiger Zeilen und Colonnen der gegebenen Matrix entstehen. Diese will ich Minoren der Matrix nennen und in der Form schreiben:

$$M_{\substack{i_1\, i_2 \cdots i_v \\ \varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_u}}$$

wo M die gegebene Matrix ist, und die Indices i und $\varkappa$ diejenigen der unterdrückten Zeilen bezw. Colonnen von M bedeuten. Wird keine Zeile ausgelassen, so schreibe ich

$$M_{\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_u}$$

Hat M n Zeilen und m Colonnen, so hat $M_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_v \\ \varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_u}}$ $(n-v)$ Zeilen und $(m-u)$ Colonnen. Von der Abhängigkeit des Vorzeichens einer Unterdeterminante von den zugehörigen Indices $i_1 i_2 \cdots i_v \; \varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_v$ sehen wir im Allgemeinen ab, um unnötige Complication zu vermeiden. Eine Reihe von Indices $i_1 i_2 \cdots i_v$ nennen wir gut geordnet, wenn jeder vorige kleiner als alle folgenden ist.

Als Determinanten einer Matrix bezeichnen wir solche, welche aus derselben durch Auslassung von Colonnen allein oder

1) Salmon, Modern Higher Algebra, S. 87—89.

von Zeilen allein entstehen. Die Determinanten von M haben m oder n Reihen, je nachdem $m<n$ oder $m>n$ ist.

Haben zwei Matrices gleich viel Reihen einer Art, Colonnen oder Zeilen, so nennen wir die $\varkappa$-ten Reihen in den beiden Matrices entsprechende.

Entsprechende Determinanten zweier Matrices von gleich viel Colonnen und gleich viel Zeilen sind solche, welche durch Unterdrückung von entsprechenden Reihen der beiden Matrices entstehen.

Eine Matrix stellt allgemein keine Grösse vor, heisst aber gleich Null, wenn ihre sämtlichen Determinanten gleich Null sind, von Null verschieden, wenn unter denselben mindestens eine nicht gleich Null ist.

Unter linearer Verbindung einer Reihe von Elementen verstehen wir die Multiplication jedes derselben mit einem gewissen Factor und die Summation der Producte. Die Elemente, auf welche sich die Operation bezieht, können einzelne Grössen oder Gleichungen oder Reihen einer Matrix sein. Das Resultat nennen wir eine lineare Verbindung der gegebenen Elemente; die genannten Factoren nennen wir die Coefficienten der linearen Verbindung. Kommen mehrere lineare Verbindungen in Betracht, so bilden die Coefficienten eine Matrix der linearen Verbindungen.

Bildet man aus linearen Verbindungen der Reihen einer Determinante D eine neue Determinante D'; ersetzt man z. B. jede Colonne von D durch eine lineare Verbindung der Colonnen, so ist

$$D' = \Delta \times D \qquad (1)$$

wo Δ die Determinante der linearen Verbindungen ist. (Man vergl. S. 42.)

Lineare Gleichungen oder auch lineare Verbindungen nennt man linear unabhängig von einander, wenn die Matrix ihrer Coefficienten von Null verschieden ist.

Wertsysteme überhaupt nennt man linear unabhängig, wenn ihre Matrix von Null verschieden ist.

Ein System von n linearen in n Unbekannten homogenen Gleichungen liefert mindestens ein Wertsystem der Unbekannten unter der nicht nur hinreichenden, sondern auch notwendigen Bedingung

$$A \equiv |a_{i\varkappa}| = 0,$$

wo A die Coefficientendeterminante des Gleichungssystems ist. Mit anderen Worten, zwischen den Elementen jeder Zeile der Determinante A besteht unter dieser Bedingung mindestens eine lineare Relation[1]).

3. Wertsysteme, welche einem System linearer Gleichungen genügen.

Wir gehen von n linearen, homogenen, linear unabhängigen Gleichungen in m Unbekannten aus:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wo $m > n$ sei.

Es gibt mindestens ein Wertsystem der m Unbekannten, welches diese Gleichungen befriedigt, denn man kann solche $(m-n)$ weitere Gleichungen in denselben Unbekannten hinzunehmen, dass die Determinante der nunmehr m Gleichungen verschwindet. Dann ergeben die m Gleichungen nach obiger Voraussetzung mindestens ein Wertsystem, welches somit die n Gleichungen (2) befriedigt. Bezeichnen wir ein solches Wertsystem mit $c_{i1}, c_{i2}, \cdots c_{im}$, so gehört zu dem gegebenen Gleichungssystem nicht nur die Coefficientenmatrix $A \equiv |a_{i\varkappa}|$, sondern auch eine Matrix $C \equiv |c_{i\varkappa}|$ der zugehörigen Wertsysteme von mindestens einer Zeile. Es handelt sich im Folgenden um die Beziehungen zwischen den beiden Matrices, welche zu einem System linear unabhängiger linearer Gleichungen gehören, nämlich der Matrix A der Coefficienten und der Matrix C der linear unabhängigen Wertsysteme.

Die Matrix C enthält $(m—n)$ Zeilen; d. h. n lineare, homogene, linear unabhängige Gleichungen in m Unbekannten werden durch $(m-n)$ linear unabhängige Wertsysteme befriedigt.

Beweis. Nach Voraussetzung besitzt die Coefficientenmatrix A mindestens eine von Null verschiedene Determinante, etwa diejenige der ersten n Colonnen. Wir bezeichnen diese De-

1) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten 1875, S. 85. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie I., S. 102.

terminante mit A' und schreiben die n Gleichungen in der Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= X_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= X_n \end{aligned}$$

wo

$$-X_i \equiv a_{i,n+1}x_{n+1} + \cdots\cdots + a_{i,m}x_m .$$

Diese n linear unabhängigen nicht homogenen Gleichungen in n Unbekannten $x_1, x_2, \cdots x_n$ liefern bekanntlich[1]) ein einziges Wertsystem, nämlich:

$$A'x_i = A'_{\substack{1\\i}}X_1 + A'_{\substack{2\\i}}X_2 + \cdots + A'_{\substack{n\\i}}X_n .$$

Hieraus folgt, wenn man die X_i durch ihre Werte ersetzt und mit A' dividiert:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_{n+1} + b_{12}x_{n+2} + \cdots + b_{1,m-n}x_m \\ x_2 &= b_{21}x_{n+1} + b_{22}x_{n+2} + \cdots + b_{2,m-n}x_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_n &= b_{n1}x_{n+1} + b_{n2}x_{n+2} + \cdots + b_{n,m-n}x_m \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Da die Auflösung wie gesagt eine eindeutige ist, so sagen die Gleichungen (3) dasselbe aus, wie die Gleichungen (2), von denen wir ausgegangen sind; indem nämlich irgend welche Werte der m Unbekannten, welche den einen genügen auch die anderen befriedigen.

Gibt man den $(m-n)$ Unbekannten $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_m$ irgend welche Werte, so ergeben sich aus den Gleichungen (3) eindeutig bestimmte Werte der n übrigen Unbekannten; d. h. ein jedes Wertsystem der Gleichungen (2) oder (3) hängt von $(m-n)$ willkürlichen Grössen eindeutig ab. Setzt man z. B. $x_{n+1} = 1$, $x_{n+2} = 0, \cdots x_m = 0$, so ergänzt sich das Wertsystem durch die Werte

$$x_1 = b_{11}, \; x_2 = b_{21}, \; \cdots\cdots \; x_n = b_{n1} .$$

Durch analoge Annahmen kommt man auf die $(m-n-1)$ weiteren Wertsysteme, welche mit dem ersteren die Zeilen der folgenden Matrix bilden

1) Baltzer, S. 62; Gordan, S. 106—108.

$$B \equiv \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \cdots & b_{n1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{12} & b_{22} \cdots & b_{n2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1,m-n} & b_{2,m-n} \cdots & b_{n,m-n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

Diese Wertsysteme sind jedenfalls linear unabhängig, denn es ist die Determinante $B_{\overline{1,2,\cdots n}} = 1$ und somit die Matrix B selbst von Null verschieden. Das Gleichungssystem (2) liefert also mindestens $(m-n)$ linear unabhängige Wertsysteme.

Es gibt auch nicht mehr als $(m-n)$ solche Wertsysteme. Denn wählt man für die $(m-n)$ willkürlichen Grössen irgend welche Werte

$$x_{n+1} = h_{n+1}, \; x_{n+2} = h_{n+2}, \cdots \; x_m = h_m$$

so folgt aus (3)

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11} h_{n+1} + b_{12} h_{n+2} + \cdots + b_{1,m-n} h_m \\ x_2 &= b_{21} h_{n+1} + b_{22} h_{n+2} + \cdots + b_{2,m-n} h_m \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= b_{n1} h_{n+1} + b_{n2} h_{n+2} + \cdots + b_{n,m-n} h_m \end{aligned}$$

Fügt man nun der Matrix B diese m Werte als Elemente einer neuen Zeile hinzu, so entsteht eine Matrix B' von $(m-n+1)$ Zeilen, wo die letzte Zeile eine lineare Verbindung der vorhergehenden ist, mit den Coefficienten $h_{n+1}, h_{n+2}, \cdots h_m$. Die $(m-n+1)$ Wertsysteme sind nicht mehr linear unabhängig, denn es verschwindet jede Determinante dieser Matrix, also die Matrix selbst, und das Gleichungssystem (2) wird durch genau $(m-n)$ linear unabhängige Wertsysteme befriedigt, w. z. b. w. Einen für uns interessanteren Beweis, wobei die unwesentliche Bevorzugung specieller Wertsysteme nicht mehr vorkommt, werden wir weiter unten geben.

4. Ähnliche und Normalmatrices.

Wir haben im Vorigen gesehen, dass die Matrix der Wertsysteme eines gegebenen Gleichungssystems keineswegs in den einzelnen Elementen bestimmt ist. Vielmehr kann man in dem eben betrachteten Falle die letzten $(m-n)$ Elemente jeder Zeile, d. h. die letzten $(m-n)$ Werte eines jeden Wertsystems, so lange ihre Determinante nicht verschwindet, beliebig annehmen; dann sind die übrigen Elemente eindeutig bestimmt. In der all-

gemeinen Wertsystemematrix ist nun jede Zeile nach Seite 39 eine lineare Verbindung der Zeilen der speciellen Matrix B in Formel (4). Wegen dieser Eigenschaft nennt man B und die allgemeine Matrix ähnlich; lässt sich die betreffende lineare Verbindung umkehren, so ist die Beziehung eine gegenseitige. Die beliebige allgemeine Matrix sei

$$B' = \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \cdots\cdots & b'_{1m} \\ b'_{21} & b'_{22} & \cdots\cdots & b'_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b'_{m-n,1} & b'_{m-n,2} & \cdots\cdots & b'_{m-n,m} \end{vmatrix}$$

Um die Determinante derjenigen linearen Verbindung zu erkennen, durch welche B' aus B entstanden ist, bemerken wir, dass bei der früheren Annahme eines $(m-n+1)$-ten Wertsystems die Coefficienten der betreffenden linearen Verbindung gerade die Werte der letzten $(m-n)$ Unbekannten waren. Also geht B' aus B durch lineare Verbindung mit der von Null verschiedenen Determinante Δ hervor, wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} b'_{1,n+1} & b'_{2,n+1} & \cdots & b'_{m-n,n+1} \\ b'_{1,n+2} & b'_{2,n+2} & \cdots & b'_{m-n,n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b'_{1,m} & b'_{2,m} & \cdots & b'_{m-n,m} \end{vmatrix}$$

Geht nun umgekehrt B durch lineare Verbindung mit der Determinante $\Delta' = |\lambda_{i\varkappa}|$ aus B' hervor, so haben die $\lambda_{i\varkappa}$ vorerst folgenden Bedingungsgleichungen zu genügen:

(Für die erste lineare Verbindung),

$$\left.\begin{array}{l} b'_{1,n+1}\lambda_{11} + b'_{2,n+1}\lambda_{21} + \cdots + b'_{m-n,n+1}\lambda_{m-n,1} = 1 \\ b'_{1,n+2}\lambda_{11} + b'_{2,n+2}\lambda_{21} + \cdots + b'_{m-n,n+2}\lambda_{m-n,1} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \\ b'_{1,m}\lambda_{11} + b'_{2,m}\lambda_{21} + \cdots + b'_{m-n,m}\lambda_{m-n,1} = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

u. s. w. für die übrigen $(m-n-1)$ linearen Verbindungen, d. h. für die übrigen $(m-n-1)$ Colonnen von Δ'.

Diese $(m-n)$ linearen nicht homogenen Gleichungen (5) haben nach Voraussetzung eine von Null verschiedene Determinante, liefern demnach ein einziges Wertsystem der Unbekannten $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \cdots \lambda_{m-n,1}$, d. h. eine der gesuchten linearen Verbindungen. Ebenso lassen sich die übrigen Colonnen von Δ' bestimmen.

So entsteht aus B' bei Anwendung der linearen Verbindungen mit der Determinante Δ' eine Matrix B'', welche jedenfalls in den letzten $(m-n)$ Colonnen mit B übereinstimmt. Dass sie vollständig mit B übereinstimmt, lässt sich wie folgt zeigen: Zwei lineare Verbindungen nach einander lassen sich auf eine einzige reducieren; d. h. entsteht die $\varkappa$-te Zeile von B'' durch lineare Verbindung der Zeilen von B' und diese ebenso durch lineare Verbindung der Zeilen von B, so entsteht die $\varkappa$-te Zeile von B'' auch direct durch lineare Verbindung der Zeilen von B. An den letzten $(m-n)$ Colonnen von B'' erkennt man wie früher bei B', dass die Determinante der zusammengesetzten linearen Verbindungen, durch welche B'' aus B entsteht, folgende ist:

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Diese lineare Verbindung kann aber gar keine Aenderung in B bewirken; d. h. B und B'' stimmen vollständig mit einander überein.

Hieraus folgt nun, erstens, dass die Beziehung zwischen B und B'' gegenseitig ist, zweitens, dass je zwei der allgemeinen Matrices B' auch einander ähnlich sind. Darf man, wie wir bald zeigen werden, die Reihen einer Art einer jeden von Null verschiedenen Matrix als linear unabhängige Wertsysteme für ein System linearer Gleichungen ansehen, so kann man folgende allgemeine Definition aufstellen:

Definition: Ähnliche Matrices sind solche von Null verschiedene Matrices von gleich viel Reihen, sowohl Colonnen wie auch Zeilen, welche aus einander entstehen durch lineare Verbindung derjenigen Reihen, Zeilen oder Colonnen, deren Anzahl nicht die grössere ist.

Zwei ähnliche Matrices M und M' sind bis auf einen Proportionalitätsfactor nicht wesentlich verschieden. Da sie nämlich keinen selbständigen Wert besitzen, so braucht man hierbei bloss ihr Verhalten den zugehörigen Determinanten gegenüber zu betrachten. Entsprechende Determinanten D und D' entstehen aus einander durch dieselbe lineare Verbindung wie die Matrices

M und M' selbst, sind also nach (1) einander proportional, d. h. es ist

$$D' = \Delta \times D.$$

Da M und M' beide von Null verschieden angenommen sind, so ist nach dieser Gleichung

$$\Delta \gtrless 0.$$

Die betreffende Eigenschaft von M und M' darf man durch die Formel ausdrücken

$$M' = \Delta \times M.$$

Da nach dem Obigen die Ähnlichkeit zweier Matrices gegenseitig ist, und zwei einer dritten Matrix ähnliche Matrices auch einander ähnlich sind, so lässt sich jede von Null verschiedene Matrix als Repräsentant einer Gruppe von unendlich viel unter einander ähnlichen Matrices betrachten; eine solche Gruppe bilden alle Matrices, welche aus je $(m—n)$ linear unabhängigen Wertsystemen eines Systems linearer Gleichungen bestehen.

In jeder solchen Gruppe gibt es wenigstens eine Matrix von der Form B in (4), d. h. eine Matrix mit einer Determinante, welche in der Hauptdiagonale alle Elemente gleich Eins hat, und sonst lauter Nullen enthält. Denn was diese Behauptung betrifft, so darf man die Matrix B' von Seite 40 als Repräsentant einer ganz beliebigen Gruppe ansehen, sobald man nur die frühere Bevorzugung der letzten $(m—n)$ Colonnen fallen lässt. Eine Matrix der eben genannten speciellen Form zeichnen wir als Normalmatrix aus. Jeder von Null verschiedenen Determinante einer beliebigen Matrix entspricht also eine ähnliche Normalmatrix, oder allgemeiner ausgedrückt, ist D eine von Null verschiedene Determinante einer Matrix M, so lässt sich eine und nur eine ähnliche Matrix M' bestimmen, deren entsprechende Determinante D' bis auf die Bedingung $D' \gtrless 0$ lauter beliebig vorgeschriebene Elemente enthält.

Zusammenfassung.

Satz I. Ein System von n linearen, homogenen, linear unabhängigen Gleichungen in m Unbekannten liefert für $m > n$ unendlich viele Wertsysteme, unter denen gerade $(m - n)$ linear unabhängig sind.

Satz II. Alle Matrices von je $(m-n)$ linear unabhängigen Wertsystemen bilden die Gesamtheit der ähnlichen Matrices einer Gruppe; jedes solche Gleichungssystem vermittelt also eine Beziehung zwischen seiner Coefficientenmatrix und einer gewissen Gruppe von unter einander ähnlichen Matrices.

Satz III. Aehnliche Matrices unterscheiden sich bloss durch einen Factor; die entsprechenden Determinanten sind einander proportional. Jeder von Null verschiedenen Determinante einer Matrix entspricht eine ähnliche Normalmatrix. Irgend eine Matrix der Gruppe, z. B. eine der Normalmatrices, darf man als Repräsentant der ganzen Gruppe auszeichnen, denn durch jede Matrix ist die ganze Gruppe völlig bestimmt.

5. Correspondierende Matrices.

Der Satz II lässt sich noch verallgemeinern. Die ähnlichen Matrices der Wertsysteme hängen nämlich nicht eigentlich von den einzelnen Coefficienten der linearen Gleichungen ab, sondern vielmehr von der Matrix derselben. Denn ersetzt man irgend eine der n Gleichungen durch eine lineare Verbindung derselben, oder ersetzt man alle diese Gleichungen durch n linear unabhängige Verbindungen derselben, so werden erstens die neuen Gleichungen durch sämtliche Wertsysteme der gegebenen befriedigt, und zweitens können sie keine weitere Lösung ergeben, weil nämlich ihre Coefficientenmatrix derjenigen der gegebenen Gleichungen ähnlich, demnach von Null verschieden ist. Auf diese Weise kann man die ursprüngliche Coefficientenmatrix durch jede ähnliche Matrix ersetzen, ohne irgend welche Änderung der Wertsysteme.

So vermittelt das betreffende Gleichungssystem nicht nur eine Beziehung zwischen einer gegebenen Matrix und einer bestimmten Gruppe von unter einander ähnlichen Matrices, sondern vielmehr zwischen zwei bestimmten Gruppen von unter einander ähnlichen Matrices, einerseits von m Colonnen und n Zeilen, andererseits von m Colonnen und $(m-n)$ Zeilen.

Diese Beziehung ist ferner eine gegenseitige; denn sie drückt sich für beliebige Matrices A und C der beiden Gruppen durch die $n(m-n)$ bilinearen Gleichungen aus:

$$a_{i1}\,c_{\varkappa 1} + a_{i2}\,c_{\varkappa 2} + \cdots\cdots + a_{im}\,c_{\varkappa m} = 0 \qquad (6)$$

wo

$$i = 1, 2, \ldots\ldots n\,; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots\ldots (m-n)$$

und man würde auf dieselben $n(m-n)$ Bedingungsgleichungen kommen, wenn man von $(m-n)$ linearen Gleichungen mit der Coefficientenmatrix C ausgegangen wäre. Wegen dieser Gegenseitigkeit darf man nicht nur die Coefficientenmatrix, sondern auch die Matrix der Wertsysteme als eine allgemeine auffassen, wie wir es im Vorigen gethan haben. Die gegenseitige Relation zwischen A und C drückt man dadurch aus, dass man dieselben correspondierende Matrices nennt, und die Gleichung (6) als Definitionsformel der Correspondenz aufstellt.

Es besteht bekanntlich[1]) der Satz: Correspondierende Determinanten zweier correspondierender Matrices sind einander proportional. D. h. es ist:

$$\begin{vmatrix} a_{1\,i_1} & a_{1\,i_2} \cdots a_{1\,i_n} \\ a_{2\,i_1} & a_{2\,i_2} \cdots a_{2\,i_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n\,i_1} & a_{n\,i_2} \cdots a_{n\,i_n} \end{vmatrix} = (-1)^\lambda \varrho \begin{vmatrix} c_{1\,i_{n+1}} & c_{2\,i_{n+2}} \cdots & c_{1\,i_m} \\ c_{2\,i_{n+1}} & c_{2\,i_{n+2}} \cdots & c_{2\,i_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{m-n,\,i_{n+1}} & \cdots & c_{m-n,\,i_m} \end{vmatrix} \quad (7)$$

oder abgekürzt,

$$A_{i_{n+1},\,i_{n+2},\,\cdots\,i_m} = (-1)^\lambda \varrho\, C_{i_1\,i_2\,\cdots\,i_n}$$

wo die Indices $i_1, i_2, \cdots i_n$ und $i_{n+1}, i_{n+2}, \cdots i_m$ gut geordnet sind, und zusammen eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots m$ bilden; dann ist

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(n-1)\,n + \sum_1^n{}^{\varkappa}\, i_\varkappa$$

während ϱ als Proportionalitätsfactor durch Vergleich irgend zweier correspondierender Determinanten zu ermitteln ist.

Lässt man identisch verschwindende Matrices, wie schon früher bestimmt, ausser Betracht, so ist notwendig $\varrho \gtrless 0$, correspondierende Determinanten verschwinden gleichzeitig, und wenn die erste Gruppe, z. B. die Normalmatrix

$$A' \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & a'_{1,\,n+1} & \cdots & a'_{1,\,m} \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & a'_{2,\,n+1} & \cdots & a'_{2,\,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & a'_{n,\,n+1} & \cdots & a'_{n,\,m} \end{vmatrix}$$

1) Gordan, S. 95.

enthält, so enthält die zweite Gruppe die Normalmatrix:

$$C' = \begin{vmatrix} c'_{11} \cdots c'_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c'_{21} \cdots c'_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-n,1} \cdots c'_{m-n,n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Hier sind die correspondierenden Determinanten bis auf das Vorzeichen einander gleich.

Nach dem Obigen kommt die Bestimmung einer Matrix C, welche einer gegebenen Matrix A correspondiert, auf die Lösung eines Gleichungssystems mit der Coefficientenmatrix A hinaus. Umgekehrt besteht jede Matrix, welche einer gegebenen Matrix correspondiert, aus lauter linear unabhängigen Wertsystemen desjenigen Gleichungssystems, dessen Coefficientenmatrix die ursprünglich gegebene ist. Enthält insbesondere eine gegebene Matrix n Colonnen und $(n-1)$ Zeilen, so enthält jede correspondierende Matrix eine einzige Zeile, deren Elemente bis auf den Proportionalitätsfactor eindeutig bestimmt sind durch die Forderung, dass sie den Determinanten der gegebenen Matrix der Reihe nach proportional seien. Man kann z. B. für diese Elemente der einen Zeile, abgesehen von Vorzeichen, direct die Werte der genannten Determinanten setzen.

Nur noch ein Fall bedarf etwas näherer Erörterung. Enthält nämlich die gegebene Matrix A von n Zeilen und m Colonnen in gewissen Colonnen, z. B. in den ersten μ, lauter Nullen, so wird man letztere bei dem Gleichungssystem auslassen. Dann bekommt man aber nicht mehr eine zu A correspondierende Matrix C von m Colonnen und $(m-n)$ Zeilen, sondern eine zu $A_{\overline{1,2,\ldots\mu}}$ correspondierende Matrix C' von $(m-\mu)$ Colonnen und $(m-n-\mu)$ Zeilen. Es sind also μ Zeilen und μ Colonnen zu wenig. Fügt man nun der Matrix C' μ Zeilen von je $(m-\mu)$ Nullen und μ Colonnen von je $(m-n-\mu)$ Nullen als erste hinzu, so ergänzt sich C' zu der gesuchten Matrix C, indem man in die entstandene leere Ecke eine beliebige von Null verschiedene Derterminante μ-ter Ordnung setzt. D. h. die Bedingungsgleichnngen mit der Coefficientenmatrix A enthalten keine Bedingung für die ersten μ Unbekannten, welche zunächst beliebige Werte annehmen können. Aus der speciellen Matrix C ergibt sich dann durch lineare Verbindung jede andere zu A correspondierende Matrix. Es mag hierbei ausdrücklich

bemerkt werden, dass man bei der Bestimmung einer correspondierenden Matrix immer die einfachste wählen kann, denn aus dieser folgt jede andere.

Beispiel. Es sei

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & a_2 \end{vmatrix}$$

dann ist

$$A_{12} \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & 0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Die Bedingungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 + a_3 x_4 &= 0 \\ a_0 x_2 \quad\quad + a_2 x_4 &= 0 \end{aligned}$$

und eine Matrix von Wertsystemen ist:

$$C' = \begin{vmatrix} -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & 0 \end{vmatrix}$$

demnach ist endlich

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_0 & 0 \end{vmatrix}$$

wo die c_{ix} nur der Bedingung

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

unterworfen sind.

Mit Hilfe des Proportionalitätssatzes[1]) lässt sich einem früheren Beweis eine interessante Gestalt geben. Es wurde nämlich unter § 3 bewiesen, dass n lineare homogene linear unabhängige Gleichungen in m Unbekannten durch gerade $(m-n)$ linear unabhängige Wertsysteme befriedigt werden. Die Annahme eines weiteren Wertsystems führte auf eine identisch verschwindende Matrix. Abgesehen von diesem Beweis sei nun wieder angenommen, dass das bekannte Gleichungssystem mit der Coefficientenmatrix A von n Zeilen und m Colonnen durch $(m-n+1)$ linear unabhängige Wertsysteme befriedigt werden

1) S. 44.

könne. Dann bilden diese Wertsysteme eine Matrix C' von m Colonnen und $(m-n+1)$ Zeilen, so beschaffen, dass durch Auslassung einer beliebigen Zeile eine zu A correspondierende Matrix C'_i entsteht. Hierbei ist auch $C'_i \gtrless 0$, denn wäre $C'_i = 0$, so müsste auch nach dem Laplace'schen Entwickelungssatz[1]) $C' = 0$ sein. Insbesondere correspondieren zu A die Matrices

$$C' = \begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ c_{31} & c_{32} & \cdots & c_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n'1} & c_{n'2} & \cdots & c_{n'm} \end{vmatrix}$$

und

$$C''_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{31} & c_{32} & \cdots & c_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n'1} & c_{n'2} & \cdots & c_{n'm} \end{vmatrix},$$

wo $n' = m-n+1$ ist. Es folgt dann aus Formel (1):

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_n} = (-1)^{\lambda} \varrho_1 \, C'_{1\, i_{n+1} i_{n+2} \cdots i_m} = (-1)^{\lambda} \varrho_2 \, C'_{2\, i_{n+1} i_{n+2} \cdots i_m}$$

Entwickelt man nun eine beliebige Determinante von C', z. B. diejenige der ersten $n' = m-n+1$ Colonnen von C' nach den Elementen der ersten Zeile, so hat man

$$C'_{n'+1, n'+2, \cdots m} = c_{11} \, C'_{1\, 1, n'+1, \cdots m} + c_{12} \, C'_{1\, 2, n'+1, \cdots m} + \cdots + c_{1n'} \, C'_{1\, n', n'+1, \cdots m}.$$

Hieraus folgt mit Hilfe der vorletzten Gleichung

$$C'_{n'+1, n'+2, \cdots m} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \left[c_{11} \, C'_{2\, 1, n'+1 \cdots m} + c_{12} \, C'_{2\, 2, n'+1, \cdots m} + \cdots + c_{1, n'} \, C'_{2\, n', n'+1, \cdots m} \right]$$

Der Ausdruck in Klammern ist nun nichts anders als die Entwickelung der identisch verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n'} \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n'1} & c_{n'2} & \cdots & c_{n'n'} \end{vmatrix}$$

1) Gordan S. 35; Baltzer S. 12.

nach den Elementen der ersten Zeile. Demnach ist die beliebige Determinante von C', $C'_{n'+1, n'+2, \cdots m}$ gleich Null, und die Annahme $C' \gtrless 0$ ist falsch.

Da es uns hauptsächlich auf die Eigenschaft der Correspondenz ankommt, so brauchen wir nicht auf weitere analoge Fälle des Verschwindens einer Matrix einzugehen.

Zusammenfassung.

Satz IV. Ein System von n linearen, homogenen, linear unabhängigen Gleichungen in m Unbekannten vermittelt für $m > n$ eine gegenseitige Beziehung zwischen zwei bestimmten Gruppen von unter einander ähnlichen Matrices, (indem man einmal die Coefficienten, einmal die Wertsysteme der Unbekannten festhält). Die einen Matrices haben m Colonnen und n Zeilen, die anderen m Colonnen und $(m-n)$ Zeilen. Diese Beziehung zwischen den betreffenden Matrices nennt man Correspondenz. Für jede Normalmatrix der einen Gruppe gibt es eine solche der anderen Gruppe.

Satz V. Jede von Null verschiedene Matrix lässt sich als Coefficientenmatrix eines Systems linearer homogener Gleichungen betrachten. Durch Auflösung dieses Gleichungssystems bekommt man die unendlich vielen ähnlichen Matrices, welche der ursprünglichen correspondieren. Die neuen Matrices correspondieren auch jeder Matrix, welche jener gegebenen ähnlich ist.

Satz VI. Hat eine Matrix von nicht weniger Colonnen als Zeilen die Eigenschaft, dass zwei und demnach sämtliche Matrices, welche durch Unterdrückung je einer Zeile der gegebenen Matrix entstehen, einer gewissen anderen Matrix correspondieren, so verschwindet die erste Matrix identisch[1]).

1) Aus diesem Satze lassen sich z. B. die geometrischen Sätze ableiten. Von den 9 Schnittpunkten zweier Curven dritter Ordnung sind nur 8 von einander unabhängig u. s. w.

6. Multiplication von Matrices.

Definition. Bildet man aus der i-ten Zeile der Matrix A

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

und der $\varkappa$-ten Zeile der Matrix

$$C \equiv \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n'1} & c_{n'2} & \cdots & c_{n'm} \end{vmatrix}$$

den Ausdruck

$$a_{i1}\, c_{\varkappa 1} + a_{i2}\, c_{\varkappa 2} + \cdots + a_{im}\, c_{\varkappa m} = p_{i\varkappa} \qquad (8)$$

für alle Wertepaare $i, \varkappa$, so lässt sich aus den $p_{i\varkappa}$ eine Matrix P von n Zeilen und n' Colonnen zusammensetzen. Im einfachsten Falle $n' = m = n$ sind alle drei Matrices Determinanten, und es ist bekanntlich[1]) $A \times C = P$. Dementsprechend kann allgemein die durch (8) definierte Matrix $P \equiv |p_{i\varkappa}|$ als Product der beiden Matrices A und C bezeichnet werden; d. h. aus (8) folgt:

$$A \times C = P \qquad (9)$$

Bei $n' = n$ ist P eine Determinante, welche aber bei $n > m$ identisch verschwindet[2]).

Bei $n' < n$ ist jede Determinante der Matrix P das Product einer Matrix von n' Zeilen aus A mit der Matrix C; demnach verschwindet P identisch bei $A \gtrless 0$ und $C \gtrless 0$ allgemein nur, wenn $n > m$ und $n' > m$ sind.

Es ist ferner bekanntlich bei $n' = n$, $m > n$ die Determinante P gleich der Summe von Producten je zweier entsprechender Determinanten von A und C[3]); d. h. es ist

$$P = A \times C = \Sigma\, A_{\overline{i_1 i_2 \cdots i_{m-n}}} \times C_{\overline{i_1 i_2 \cdots i_{m-n}}} \qquad (10)$$

1) Baltzer, S. 46; Gordan, S. 73.
2) Baltzer, S. 46; Gordan, S. 86.
3) Baltzer, S. 46; Gordan, S. 87.

Das Obige, insbesondere Formel (8) bezieht sich auf eine Multiplication von Zeilen mit Zeilen. Ganz analog lassen sich zwei Matrices multiplicieren, wenn die Colonnen- oder die Zeilenzahl der einen gleich der Colonnen- oder der Zeilenzahl der anderen ist, also in vier verschiedenen Fällen. Ist einer der beiden Factoren eine Determinante, so ist die Bevorzugung der Zeilen oder Colonnen derselben insofern gleichgiltig als die entsprechenden Determinanten der zwei Productmatrices einander gleich sind. Sonst gibt es keine eigentliche Willkür bei der Multiplication; hat man z. B. zwei Matrices von je m Colonnen und n Zeilen, wo $m > n$ ist, so kann man nur dadurch eine von Null verschiedene Productmatrix bekommen, dass man wie oben Zeilen mit Zeilen multiplicirt. Die Formeln für die drei anderen Fälle unterscheiden sich zu wenig von (8), als dass wir dieselben hinzuschreiben brauchten.

Unterdeterminanten einer Productdeterminante.

Die Minoren der oben definierten Productmatrix P lassen sich als einfache Producte darstellen; wir beschränken uns auf den wichtigsten Fall $n = n'$, und nehmen dabei keine Rücksicht auf die Abhängigkeit des Vorzeichens von den betreffenden Indices. Es sei zunächst $P_{i \atop \varkappa}$ eine beliebige erste Unterdeterminante der Determinante P; sie entsteht durch Unterdrückung der i-ten Zeile und der $\varkappa$-ten Colonne von P. Die Elemente dieser Zeile bezw. Colonne von P, d. h. die Elemente p mit dem ersten Index i oder mit dem zweiten Index $\varkappa$ hängen nach Formel (8) von den Elementen der i-ten Zeile von A bezw. der $\varkappa$-ten Zeile von C ab. Unterdrückt man also jene Zeile von A und diese von C, so kommen bei der Multiplication nur die genannten $p_{i\varkappa}$ nicht mehr vor, d. h. es ist

$$P_{i \atop \varkappa} \quad A_i \times C_\varkappa$$

Der allgemeine Fall ist ganz ähnlich. Um nämlich die beliebige Unterdeterminante $P_{i_1 i_2 \cdots i_\mu \atop \varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_\mu}$ zu bekommen, braucht man einerseits nur alle Elemente p mit einem ersten Index aus der Reihe $i_1, i_2, \cdots i_\mu$, oder mit einem zweiten Index aus der Reihe $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu$ zu unterdrücken, also andererseits bloss die i_1-te, i_2-te, $\cdots$ i_μ-te Zeile von A und die $\varkappa_1$-te, $\varkappa_2$-te, $\cdots$ $\varkappa^\mu$-te Zeile von C auszulassen. D. h. es ist

$$P_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_\mu \\ z_1 z_2 \cdots z_\mu}} = A_{i_1 i_2 \cdots i_\mu} \times C_{z_1 z_2 \cdots z_\mu} \qquad (11)$$

die allgemeine Formel für die Darstellung einer Unterdeterminante von P als Product zweier Matrices[1]).

Specielle Darstellung des Productes zweier Matrices.

Nach dem Obigen lässt sich das Product zweier Matrices A und C von je m Colonnen und n Zeilen, wenn $m > n$, als eine Determinante von n Reihen darstellen. Kennen wir aber eine zu A oder zu C correspondierende Matrix, so lässt sich das Product am einfachsten als eine Determinante m-ter Ordnung darstellen. Ist nämlich eine zu C correspondierende Matrix

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m-n,1} & & \cdots & b_{m-n,m} \end{vmatrix}$$

so ist

$$A \times C = \varrho \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m-n,1} & b_{m-n,2} & \cdots & b_{m-n,m} \end{vmatrix}$$

oder kürzer

$$A \times C = \varrho \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$$

wo ϱ der Proportionalitätsfactor zwischen correspondierenden Determinanten von B und C ist.

Beweis. Aus den Formeln (10) und (7) folgt:

$$A \times C = \sum A_{i_1' i_2' \cdots i_{m-n}'} \times C_{i_1 i_2 \cdots i_{m-n}}$$
$$= \sum A_{i_1 i_2 \cdots i_{m-n}} \times (-1)^\lambda \cdot \varrho \cdot B_{i_{n'} i_{n'+1} \cdots i_n}$$

wo $n' = m - n + 1$ und $\lambda = \frac{1}{2} n(n+1) + \sum_1^n i_\varkappa$ ist.

1) Diese Darstellung von Unterdeterminanten ist für den Fall $m = n$ schon von Muir gegeben worden: Theory of Determinants S. 103, London, 1882.

Dies ist aber, abgesehen von dem Factor ϱ, nichts anderes als die Laplace'sche Entwickelung der Determinante $\left|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right|$ nach den Determinanten von A[1]); also ist

$$P = A \times C = \varrho \left|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right| \text{ w. z. B. w.} \qquad (12)$$

Die wesentliche Unbestimmtheit der Elemente von B wird durch ϱ ausgedrückt. Da A und C bei der Multiplication vertauschbar sind, so ist, wenn A und B correspondierende Matrices sind, $P = A \times C = \varrho' \left|\begin{matrix} C \\ B' \end{matrix}\right|$. In beiden Fällen haben die Zeilen von B bei der Zusammensetzung denen der anderen Matrix zu folgen.

Zusammenfassung.

Satz VII. Das Product zweier Matrices A und C von gleich viel Colonnen ist eine Matrix P, deren Elemente durch die Formel (8) definiert sind. P verschwindet identisch, wenn A und C beide mehr Zeilen als Colonnen enthalten, oder auch, wenn A und C correspondierende Matrices sind.

Satz VIII. Haben A und C ausserdem auch gleich viele Colonnen, so ist P eine Determinante, und es lässt sich jede Unterdeterminante derselben ebenfalls als Product zweier Matrices darstellen. Formel (11).

Satz IX. Haben A und C je m Colonnen und n Zeilen, wo $m \geqq n$ ist, so hat P n Colonnen und Zeilen. Kennt man aber eine zu A oder C correspondierende Matrix, so lässt sich $A \times C$ als eine Determinante $m$ter Ordnung darstellen. Formel (12).

Umgekehrt, spaltet man eine beliebige Determinante P $m$ter Ordnung irgendwie in zwei Matrices A und B von je m Colonnen, und bestimmt man für eine derselben, etwa B eine correspondierende Matrix C, so ist

$$(\pm) P \equiv \left|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right| = \varrho \cdot A \times C \qquad (12)$$

d. h. die gegebene Determinante P lässt sich bis auf einen Proportionalitätsfactor als Product zweier Matrices von je m Colonnen und n Zeilen darstellen, wo $m > n$ ist.

1) Baltzer, S. 29, Gordan, S. 61.

7. Lineare Verbindung.

Als Multiplication. Nachdem wir schon unter Voraussetzung eines einfachen Satzes lineare Verbindung mehrfach angewandt haben, wollen wir sie nun mit Hülfe des vorigen Paragraphen etwas näher betrachten und dabei den genannten Satz verallgemeinern.

Es sei $A \equiv |a_{i\varkappa}|$ eine beliebige von Null verschiedene Matrix von m Colonnen und n Zeilen, wo $m \geq n$ ist, $\Delta \equiv |\lambda_{i\varkappa}$ die Matrix beliebiger linearer Verbindungen, welche sich auf die Zeilen von A beziehen. Also hat Δ ebenfalls n Zeilen und man bekommt die erste Zeile der neuen Matrix A', wenn man die erste Zeile von A mit λ_{11}, die zweite mit λ_{21}, u. s. w. die n-te mit λ_{n}, multipliciert und dann die Producte addiert. D. h. es ist

$$a'_{1\varkappa} = \lambda_{11}\, a_{1\varkappa} + \lambda_{21}\, a_{2\varkappa} + \cdots + \lambda_{n1}\, a_{n\varkappa}.$$

Da man zur Bestimmung der weiteren Zeilen von A' die anderen Colonnen von Δ nach einander benützt, so hat man allgemein:

$$a'_{i\varkappa} = \lambda_{1i}\, a_{1\varkappa} + \lambda_{2i}\, a_{2\varkappa} + \cdots + \lambda_{ni}\, a_{n\varkappa}.$$

Dies ist aber nichts anderes als die Productformel für die Multiplication von Δ und A, Colonnen mit Colonnen. D. h. es ist

$$A' \quad \Delta \times A \qquad (13)$$

Da nach Voraussetzung $m \geq n$ ist, so ist für $n' > n$, $A' \equiv 0$, den Grenzfall $m = n$ ausgenommen, unter n' die Colonnenzahl von Δ verstanden.

Anwendung auf lineare Gleichungen.

Dieses Resultat wenden wir nun auf ein System linearer Gleichungen an. Wir bezeichnen die n Gleichungen (2) der Reihe nach mit $F_1 = 0, F_2 = 0, \cdots F_n = 0$, und bilden durch lineare Verbindung die n' Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F'_1 &\equiv \lambda_{11} F_1 + \lambda_{21} F_2 + \cdots + \lambda_{n1} F_n = 0 \\ F'_2 &\equiv \lambda_{12} F_1 + \lambda_{22} F_2 + \cdots + \lambda_{n2} F_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F'_{n'} &\equiv \lambda_{1n'} F_1 + \lambda_{2n'} F_2 + \cdots + \lambda_{nn'} F_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

wobei $\Delta = |\lambda_{i\varkappa}| \geq 0$ ist. Bezeichnen wir mit $a'_{i\varkappa}$ den Coefficient von $x_\varkappa$ in F'_i, so ist

$$a'_{i\varkappa} = \lambda_{1i} a_{1\varkappa} + \lambda_{2i} a_{2\varkappa} + \cdots + \lambda_{ni} a_{n\varkappa},$$

also ist wie oben

$$A' = \Delta \cdot A.$$

Da $m > n$ ist, so ist $A' = 0$, sobald auch $n' > n$ wird.

Elimination. Es kann nun vorkommen bei geeigneter Wahl der $\lambda_{i\varkappa}$, dass einige der Unbekannten x_i nicht mehr in den Gleichungen (14) vorkommen. Wird nämlich $x_\varkappa$ eliminiert, so genügen die Elemente jeder der n' Colonnen von Δ der Bedingung:

$$a'_{i\varkappa} = 0 = \lambda_{1i} a_{1\varkappa} + \lambda_{2i} a_{2\varkappa} + \cdots + \lambda_{ni} a_{n\varkappa} \quad (15)$$

Da diese Gleichung überhaupt nur $(n-1)$ linear unabhängige Wertsysteme der Unbekannten λ zulässt, so muss $n' < n-1$ sein, damit Δ nicht identisch verschwinde. Werden allgemein irgend v der Grössen x_i eliminiert, so genügen die Elemente jeder Colonne von Δ v solchen Bedingungsgleichungen, denjenigen nämlich, welche aus (15) entstehen, wenn man $\varkappa$ durch den Index jedes der eliminierten x_i der Reihe nach ersetzt. Die Coefficienten jeder dieser Gleichungen sind also die Elemente einer gewissen Colonne von A, die Matrix der Bedingungsgleichungen ist $A_{\varkappa_{v+1}, \varkappa_{v+2}, \cdots \varkappa_m}$. Sind die Bedingungsgleichungen linear unabhängig von einander, d. h. ist die eben genannte Matrix von Null verschieden, so liefern sie überhaupt bloss $(n-v)$ Wertsysteme, und es ist $n' < n-v$.

Bei $m = n$ sind die betreffenden Gleichungen jedenfalls linear unabhängig, denn wäre $A_{\varkappa_{v+1}, \varkappa_{v+2}, \cdots \varkappa_m} = 0$, so würde nach dem Laplace'schen Entwickelungssatz auch $A = 0$, also die gegebenen Gleichungen selbst würden nicht mehr linear unabhängig sein. Bei $m = n$ ist also immer $n' < n-v$.

Andererseits bedeutet die Elimination von v Gliedern, dass die Coefficientenmatrix A' der neuen Gleichungen in v Colonnen lauter Nullen enthält. Will man aber die eigentliche Coefficientenmatrix der n' Gleichungen haben, so lässt man diese Colonnen aus. Gerade diese v Colonnen von A' und keine anderen hängen bei der Multiplication von denjenigen v Colonnen von A ab, welche die Matrix $A_{\varkappa_{v+1}, \cdots \varkappa_m}$ bilden. Also bekommt man die

wirkliche Coefficientenmatrix der neuen Gleichungen, wenn man vorher alle solchen Colonnen von A unterdrückt, welche bei der Multiplication mit Δ blos Colonnen von lauter Nullen ergeben würden.

Im Grenzfalle $n' = n - v$ reduciert sich A bei $m = n$ auf eine Determinante $(n-v)$-ter Ordnung, während Δ und $A_{z_{r+1}, \cdots z_m}$ correspondierende Matrices sind, wie man an den Formeln (6) und (15) erkennt.

Zusammenfassung.

Satz X. Die Bildung einer Matrix durch lineare Verbindung der Zeilen einer gegebenen Matrix ist nichts anderes als die Multiplication der letztern, Colonnen mit Colonnen mit der Matrix der linearen Verbindungen. Formel (13). Insbesondere unterscheiden sich zwei ähnliche Matrices um einen Factor, welcher, wie früher aus einer Voraussetzung abgeleitet, die Determinante der linearen Verbindung ist.

Satz XI. Bildet man durch lineare Verbindung von n linearen linear unabhängigen Gleichungen n' neue Gleichungen, so ist allgemein $n' \leq n - v$, wo v die Anzahl der Unbekannten bedeutet, welche in den neuen Gleichungen nicht mehr vorkommen. Die Grenze $(n-v)$ ist eine genaue, falls die ursprünglichen Gleichungen gerade n homogene Unbekannten enthalten. Diese Elimination kommt auf die Bestimmung einer Matrix Δ hinaus, welche der Matrix der betreffenden v Coefficientencolonnen correspondiert. Formel(15).

Die Matrix der neuen Gleichungen ist dann das Product dieser Matrix Δ und der Matrix der übrigen Coefficienten. D. h. es ist

$$A' = \Delta \, / \, A_{z_1 z_2 \cdots z_v}$$

wo A' die Coefficientenmatrix der neuen Gleichungen bedeutet. Ist A eine Determinante, so ist auch A' im Grenzfalle $n' = n - v$ eine Determinante $(n-v)$-ter Ordnung.

Satz XII. Kennt man umgekehrt $(n-v)$ linear unabhängige lineare Gleichungen, welche mittelst Elimination von v Unbekannten durch lineare Verbindungen von n derartigen Gleichungen entstehen, so hat man zwei correspondierende Matrices, nämlich die Matrix der linearen Ver-

bindung von n Zeilen und $(n-v)$ Colonnen und die Matrix der ursprünglichen Coefficienten der eliminierten Glieder von n Zeilen und v Colonnen.

Auszunehmen ist nur der Fall, dass letztere Matrix identisch verschwindet, was aber nur dann möglich ist, wenn die Anzahl der ursprünglichen Glieder n überschreitet.

Zweites Kapitel.

Anwendung der obigen Sätze auf gewisse Gleichungssysteme.

1. Einleitung.

Als eine der zahlreichen Anwendungen, welcher die bisherigen Theoreme fähig sind, betrachten wir im Folgenden gewisse Eigenschaften der beiden Determinanten, welche als Resultanten zweier Gleichungen desselben Grades unter den Namen von Bézout bezw. Sylvester bekannt sind.

Hierbei wird nicht beabsichtigt, eine vollständige Theorie dieser beiden Determinanten zu entwickeln. Sie verdanken ihre ursprüngliche Aufstellung freilich dem Studium gewisser Eliminationsprobleme, und seitdem sind sie gewöhnlich blos als Hülfsmittel bei andern Aufgaben studiert worden. Wir sprechen dagegen gar nicht von den Anwendungen dieser Determinanten bei der Theorie der Elimination, des grössten gemeinsamen Teilers u. s. w., denn diese Gegenstände sind schon längst häufig und ausführlich behandelt worden, und wenn man auch auf diese Weise die Beziehungen zwischen den Determinanten ermitteln konnte, so wäre die Methode doch eine indirecte. Erst wenn wir von diesen Nebensachen absehen, gewinnen wir eine befriedigende Uebersicht über die genannten Beziehungen.

Ausserdem legen wir noch grösseres Gewicht auf die Wirksamkeit und Bedeutung der allgemeinen Sätze des ersten Kapitels in dieser speciellen Richtung; die zu beweisenden Resultate sind ja zum Teil schon bekannt.

Zur Geschichte der beiden Determinanten mag Folgendes angeführt werden:

Zu ungefähr derselben Zeit haben sich Euler[1]) und Bézout[2]) mit der Aufgabe beschäftigt, eine Bedingung zwischen

1) Acta Acad. Ber. XX, 1764.
2) Hist. de l'Acad. royale des sciences. Paris 1764.

den Coefficienten zweier Gleichungen zu ermitteln, damit dieselben eine gemeinsame Wurzel besitzen. Beide wollten die genannte Aufgabe auf die Coexistenz einer Reihe linearer Gleichungen zurückführen.

Dabei hat Bézout folgendes Gleichungssystem aufgestellt:

$$b_0 f - a_0 \varphi \equiv (a_1 b_0 - a_0 b_1) x^{n-1} + (a_2 b_0 - a_0 b_2) x^{n-2} + \cdots + (a_n b_0 - a_0 b_n) = 0$$

$$(b_0 x + b_1) f - (a_0 x + a_1) \varphi \quad (a_2 b_0 - a_0 b_2) x^{n-1} + \cdots + (a_n b_1 - a_1 b_n) = 0$$

. . . . . .

$$(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}) f - (a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) \equiv (a_n b_0 - a_0 b_n) x^{n-1} + \cdots + (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) = 0$$

Diese n Gleichungen vom Grade $(n-1)$ in x betrachtete er dann als linear in den Grössen $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots 1$ und stellte als die betreffende Bedingung das Verschwinden ihrer Coefficientendeterminante auf.

Später hat Jacobi[1]) einige der Haupteigenschaften dieser Determinante entwickelt, worauf wir in der Folge zurückkommen. Andererseits hat Sylvester[2]) die 2 n Gleichungen abgeleitet:

$$x^{n-1} f = 0, \; x^{n-2} f = 0 \; \ldots \; f = 0$$
$$x^{n-1} \varphi = 0, \; x^{n-2} \varphi = 0 \; \ldots \; \varphi = 0$$

und indem er diese als linear in den Grössen $x^{2n-1}, x^{2n-2}, \ldots 1$ ansieht, stellt er als Bedingung für die Existenz einer gemeinsamen Wurzel der 2 Gleichungen das Verschwinden der Coefficientendeterminante dieser Gleichungen auf.

Diese Determinante

$$S = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots & o \\ o & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & \ldots & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ o & o & o & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n & \ldots & o \\ o & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & \ldots & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ o & o & o & \ldots & b_0 & b_1 & \ldots & b_n \end{vmatrix} \quad (16)$$

1) Crelle's Journal, Bd. XV.
2) Philosophical Magazine 1840.

ist übrigens die transponierte Determinante der linearen Gleichungen von Euler.

Wir erwähnen noch die bekannte Methode von Cayley[1]), um die Bézout'sche Determinante aufzustellen. Seitdem hat man auf verschiedene Weisen bewiesen, dass die Bézout'sche und die Sylvester'sche Determinante sowie gewisse ihrer Unterdeterminanten einander gleich sind[2]). Wir erwähnen darunter blos die Beweise von Mansion[3]), von Dölp[4]) (»nach einer Mitteilung von Brill«), und von Muir[5]), auf deren Methoden wir im Folgenden zurückkommen.

In diesem Kapitel ist der Hauptansatz der, dass wir erstens nach dem Gedanken von Bézout sämtliche vorkommende Gleichungen als linear betrachten, und zweitens diesen Gedanken weiter verfolgend jede dieser Gleichungen als eine lineare Verbindung der 2 n Sylvester'schen Gleichungen auffassen.

Diese Eigenschaft der Bézout'schen Gleichungen ist auch von Lemonnier[6]) in einer Abhandlung über Elimination hervorgehoben worden, aber von einem etwas anderen Gesichtspunkt aus.

Dadurch nämlich gewinnen wir directen Anschluss an die Sätze des ersten Kapitels, welche die gegenseitigen Beziehungen zwischen Gleichungssystemen und den betreffenden Matrices erkennen lassen. Je nachdem wir die Gleichungssysteme oder die betreffenden Matrices hauptsächlich in's Auge fassen, gewinnen wir Aufschluss über gewisse Punkte oder über die allgemeine Natur der Relationen. Beide Methoden ergänzen einander.

Durch dieses Verfahren kommen wir auf eine Reihe für die Folge besonders wichtiger Darstellungen der Bézout'schen Determinante als Product zweier Matrices.

Beiläufig beweisen wir, dass die Sylvester'sche und die Bézout'sche Determinante einander gleich sind.

Die zufällige Bevorzugung der Colonnen oder der Zeilen bei den Sätzen des ersten Kapitels dürfen wir fortan ausser Acht lassen.

1) Baltzer, S. 116. Gordan, S. 158.
2) Baltzer, S. 113—116. Gordan, S. 156—158.
3) Bull. de l'Acad. royale de Belgique, 1879.
4) Die Determinanten, Darmstadt, 1873.
5) Theory of Determinants p. 108, London 1882.
6) Annales de l'école normale supérieure, 2e sér. VII, 1878.

2. Beziehungen zwischen den Gleichungssystemen.

Der Symmetrie halber schreiben wir die beiden Hauptgleichungen homogen wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} f &\quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n = 0 \\ \varphi &\quad b_0 y^n + b_1 x^{n-1} y + \cdots + b_n y^n = 0 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

wobei die vier Grössen a_0, b_0, a_n, b_n von Null verschieden seien.

Dann lauten die Sylvester'schen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x^{n-1} f &= a_0 x^{2n-1} + a_1 x^{2n-2} y + \cdots + a_n x^{n-1} y^n = 0 \\ x^{n-2} y f &= a_0 x^{2n-2} y + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} y^n + a_n x^{n-2} y^{n+1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{n-1} f &= a_0 x^n y^{n-1} + \cdots + a_n y^{2n-1} = 0 \\ x^{n-1} \varphi &= b_0 x^{2n-1} + b_1 x^{2n-2} y + \cdots + b_n x^{n-1} y^n = 0 \\ x^{n-2} y \varphi &= b_0 x^{2n-2} y + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} y^n + b_n x^{n-2} y^{n+1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{n-1} \varphi &= b_0 x^n y^{n-1} + \cdots + b_n y^{2n-1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

die Determinante S bleibt ungeändert.

Die Bézout'schen Gleichungen schreiben wir dann in etwas anderer Form und Reihenfolge:

$$\left.\begin{aligned} &(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} y + \cdots + b_{n-1} y^{n-1}) f \\ &\quad + (a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} y + \cdots + a_{n-1} y^{n-1}) \varphi = 0 \\ -&(b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} y + \cdots + b_{n-2} y^{n-2}) f \\ &\quad + (a_0 x^{n-2} + a_1 x^{n-3} y + \cdots + a_{n-2} y^{n-2}) \varphi = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad - b_0 f + a_0 \varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems nennen wir fortan die Bézout'sche und bezeichnen sie mit

$$R = |r_{iz}|.$$

Man bilde nun aus $f = o$ und $\varphi = o$ die n Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} M_1 f + N_1 \varphi &= 0 \\ M_2 f + N_2 \varphi &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ M_\mu f + N_\mu \varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$\text{wo} \quad \begin{matrix} M & \alpha_{1i}\, x^{n-1} + \alpha_{2i}\, x^{n-2}\, y + \cdots + \alpha_{ni}\, y^{n-1} \\ N_i & \beta_{1i}\, x^{n-1} + \beta_{2i}\, x^{n-2}\, y + \cdots + \beta_{ni}\, y^{n-1} \end{matrix} \Bigg\} \quad (21)$$

Bei diesen Gleichungen (20) ist für uns das Wesentliche, dass sie lineare Verbindungen der Sylvester'schen Gleichungen sind.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} M_i\, f + N_i\, \varphi \quad & \alpha_{1i}\, x^{n-1} \cdot f + \alpha_{2i}\, x^{n-2}\, y \cdot f \\ & + \cdots + \alpha_{ni}\, y^{n-1} \cdot f + \beta_{1i}\, x^{n-1} \cdot \varphi \\ & + \beta_{2i}\, x^{n-2}\, y\, \varphi + \cdots + \beta_{ni}\, y^{n-1} \cdot \varphi \end{aligned}$$

Die Coefficienten der linearen Verbindung sind eben die $\alpha_{i\varkappa}, \beta_{i\varkappa}$.

Die Sylvester'schen Gleichungen bilden also die Grundlage; aus ihnen entsteht durch lineare Verbindung jedes System der Form (20), unter anderen auch die Bézout'schen Gleichungen. Bei diesen haben wir nach den Formeln (19), (20), (21);

$$\begin{aligned} M_i \quad & - b_0\, x^{n-i} \quad b_1\, x^{n-i-1}\, y - \cdots - b_{n-i}\, y^{n-i} \\ N_i = \quad & a_0\, x^{n-i} + a_1\, x^{n-i-1}\, y + \cdots + a_{n-i}\, y^{n-i} \end{aligned}$$

und die Indices der i-ten linearen Verbindung sind

$$0, \ldots 0, -b_0, -b_1, \ldots - b_{n-i}, 0, \ldots 0, a_1, a_2, \ldots a_{n-i} \quad (22)$$

Nun ist das Wesentliche bei dieser besonderen linearen Verbindung der Sylvester'schen Gleichungen, dass die n ersten Glieder:

$$x^{2n-1}, x^{2n-2}\, y, \ldots y^{2n-1}$$

eliminiert werden. Ebenso gut kann man allgemein nach dem Satz XI bei Elimination von irgend n Gliedern aus den Sylvester'schen Gleichungen n linear unabhängige Gleichungen bekommen. So wollen wir den Fall betrachten, dass die ersten r und die letzten $(n-r)$ Glieder zu eliminieren sind.

Wir setzen zunächst:

$$\left.\begin{aligned} f &\equiv A_\varkappa\, x^\varkappa + B_\varkappa\, y^{n-\varkappa-1} \\ \varphi &\equiv C_\varkappa\, x^\varkappa + D_\varkappa\, y^{n-\varkappa+1} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

wo

$$\left.\begin{matrix} A_\varkappa & a_0\, x^{n-\varkappa} + a_1\, x^{n-\varkappa-1}\, y + \cdots + a_{n-\varkappa}\, y^{n-\varkappa} \\ B_\varkappa & a_{n-\varkappa+1}\, x^{\varkappa-1} + a_{n-\varkappa+2}\, x^{\varkappa-2} y + \cdots + a_n y^{\varkappa-1} \\ C_\varkappa & b_0\, x^{n-\varkappa} + b_1\, x^{n-\varkappa-1}\, y + \cdots + b_{n-\varkappa}\, y^{n-\varkappa} \\ D_\varkappa & b_{n-\varkappa+1}\, x^{\varkappa-1} + b_{n-\varkappa+2}\, x^{\varkappa-2} y + \cdots + b_n y^{\varkappa-1} \end{matrix}\right\} \quad (24)$$

und $\varkappa$ irgend einen der Werte $1, 2, 3, \cdots n$ besitzt. Dann lassen sich die Bézout'schen Gleichungen (19) in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} -[C_1 \cdot f - A_1 \cdot \varphi] = y^n [A_1 \cdot D_1 - B_1 \cdot C_1] \quad = 0 \\ -y [C_2 \cdot f - A_2 \cdot \varphi] - y^n [A_2 \cdot D_2 - B_2 \cdot C_2] \quad - 0 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ - y^{n-1} [C_n \cdot f - A_n \varphi] \quad y^n [A_n D_n - B_n C_n] \quad 0 \end{array}\right\} \quad (25)$$

In diesen Gleichungen fehlen wie gesagt die n Glieder:

$$x^{2n-1},\ x^{2n-2} y,\ \ldots .\ x^n y^{n-1}$$

Will man nun nicht mehr die ersten, sondern die letzten n Glieder eliminieren, so hat man wegen der Symmetrie in x und y die n Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{rl} x^{n-1} [D_1 \cdot f - B_1 \cdot \varphi] & x^n [A_1 D_1 - B_1 C_1] \quad 0 \\ x^{n-2} [D_2 \cdot f - B_2 \cdot \varphi] & = x^n [A_2 D_2 - B_2 C_2] = 0 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ D_n f - B_n \varphi & = x^n [A_n D_n - B_n C_n] = 0 \end{array}\right\} \quad (26)$$

Diese Gleichungen sind nämlich ebenfalls von der Form $Mf + N\varphi = 0$, und

$$x^n [A_\varkappa D_\varkappa - B_\varkappa C_\varkappa]$$

kann keines der Glieder:

$$x^{n-1} y^n,\ x^{n-2} y^{n+1},\ \ldots .\ y^{2n-1}$$

enthalten.

Die Bildung des allgemeinen Systems n-gliedriger Gleichungen folgt auf ähnliche Weise. Aus dem Gesagten ergibt sich nämlich, dass folgende n Gleichungen von der Form $M \cdot f + N \cdot \varphi - 0$ keines der Glieder:

$$x^{2n-1},\ x^{2n-2} y,\ \ldots .\ x^{2n-r} y^{r-1},\ x^{n-r-1} y^{n+r},\ \ldots .\ y^{2n-1}$$

enthalten:

$$\left.\begin{array}{l} x^{n-r-1} y^r [D_1 \cdot f - B_1 \cdot \varphi] = x^{n-r} y^r [A_1 D_1 - B_1 C_1] = 0 \\ x^{n-r-2} y^r [D_2 \cdot f - B_2 \cdot \varphi] = x^{n-r} y^r [A_2 D_2 - B_2 C_2] = 0 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y^r [D_{n-r} f - B_{n-r} \varphi] = x^{n-r} y^r [A_{n-r} D_{n-r} - B_{n-r} C_{n-r}] = 0 \\ - x^{n-r} [C_{n-r+1} f - A_{n-r+1} \varphi] \quad x^{n-r} y^r [A_{n-r+1} D_{n-r+1} \\ \qquad\qquad - B_{n-r+1} C_{n-r+1}] = 0 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ - x^{n-r} y^{r-1} [C_n \cdot f - A_n \varphi] = x^{n-r} y^r [A_n D_n - B_n C_n] = 0 \end{array}\right\} \quad (27)$$

Vergleichen wir nun die verschiedenen Systeme n-gliedriger Gleichungen (25), (26), (27), so sehen wir, dass sie bis auf die Factoren y^n, x^n, x^{n-r}, y^r alle identisch sind. Sie haben demnach alle dieselbe Coefficientendeterminante, nämlich die Bézout'sche Determinante R.

Satz XIII. Die Bézout'schen Gleichungen, sowie die allgemeinen Gleichungen $M_i \cdot f + N_i \cdot \varphi = 0$, wo M_i und N_i beliebige Ausdrücke $(n-1)$-ten Grades bedeuten, sind lineare Verbindungen der $2n$ Sylvester'schen Gleichungen. Formel (19) bis (22).

Satz XIV. Als allgemeine n-gliedrige Gleichungen bezeichnen wir die Systeme (27), d. h. gewisse lineare Verbindungen der Sylvester'schen Gleichungen, bei welchen bloss n aufeinander folgende Glieder

$$x^{2n-r-1} y^r,\ x^{2n-r-2} y^{r+1},\ \ldots\ x^{n-r} y^{n+r-1}$$

noch vorkommen.

Den verschiedenen Werten von p entsprechen verschiedene Systeme von je n solchen Gleichungen; und diese Systeme haben alle dieselbe Coefficientendeterminante, nämlich die Bézout'sche Determinante.

3. Uebergang zur Matrixtheorie.

Betrachten wir nun dem obigen Satze gemäss die Gleichungen $M_i \cdot f + N_i \cdot \varphi = 0$ als lineare Verbindungen der Sylvester'schen Gleichungen, und diese ihrerseits als linear in den Grössen

$$x^{2n-1},\ x^{2n-2}\, y,\ \ldots\ y^{2n-1},$$

so können wir die eben erhaltenen Eliminationsresultate mit Hülfe der Sätze XI und XII auf die betreffenden Matrices übertragen. Bezeichnen wir nämlich mit E die Coefficientenmatrix des allgemeinen Gleichungssystems (20), so folgt nach dem Satz XI die Formel:

$$E = A \times S = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n\mu} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1\mu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{n\mu} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & b_1 \ldots & b_n \end{vmatrix} \quad (28)$$

wo Colonnen mit Colonnen zu multiplicieren sind, und der Coefficient von

$$x_\varkappa \, y^{n-\varkappa} \quad \text{in} \quad M_i \cdot f + N_i \cdot \varphi$$

durch Multiplication der i-ten Colonne von Δ mit der $(2n-\varkappa)$-ten Colonne von S entsteht. Wollen wir Nullencolonnen von der Coefficientenmatrix ausschliessen, so schreiben wir nach dem letzten Teil des Satzes XI

$$E = \Delta \times S_{i_1 i_2 \cdots i_v} \tag{29}$$

wo die $i_1, i_2, \cdots i_v$ den v eliminierten Gliedern

$$x^{2n-i_1} y^{n-i_1-1}, \ \ldots \ x^{2n-i_v} y^{n-i_v-1}$$

entsprechen. Dann ist E eine Matrix von μ Zeilen und $(2n-v)$ Colonnen; v kann jeden ganzzahligen Wert von 0 bis $(2n-\mu)$ annehmen, wir beschränken uns aber fortan auf den Grenzfall $v = 2n-\mu$ wobei E immer eine Determinante ist.

Den verschiedenen Gleichungssystemen entsprechen nun specielle Fälle der Formel (28) bezw. (29).

1. Ist $\mu = 2n$, also $v = 0$, so ist Δ eine Determinante und die Coefficientendeterminante des Gleichungssystems unterscheidet sich bloss um den Factor Δ von der Sylvester'schen Determinante.

2. Bei den Sylvester'schen Gleichungen (18) ist

$$M_1 = x^{n-1}, M_2 = x^{n-2} y, \ \ldots \ M_n = y^{n-1},$$
$$N_1 = N_2 = \cdots = N_n = 0;$$
$$M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots = M_{2n} = 0,$$
$$N_{n+1} = x^{n-1}, N_{n+2} \quad x^{n-2} y, \ \ldots \ N_{2n} = y^{n-1}.$$

Demnach hat Δ die Normalform

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

und (28) lautet $E = S$.

3. Bei den Bézout'schen Gleichungen (19) haben wir $\mu = n$, $v = n$, und da die ersten n Glieder fehlen $i_1 = 1, i_2 = 2, \cdots i_n = n$. Mit Hülfe der Werte (22) für die $\alpha_{i\varkappa}, \beta_{i\varkappa}$ ergibt sich für (29)

$$E - R \quad \begin{vmatrix} -b_0 & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & -b_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_0 \\ a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_n & 0 & \dots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix} \qquad (30)$$

oder kürzer $R = \overline{P} \times Q$.

4. Bei den allgemeinen n gliedrigen Gleichungen (27) haben wir wieder $\mu = n, \nu = n$ und da die ersten r und die letzten $(n-r) = s$ Glieder fehlen,

$$i_1 = 1, \dots i_r = r, i_{r+1} \quad n + r + 1, \dots i_n \quad 2n.$$

Es ist ferner nach Formeln (27) und (24),

$$M_1 = b_n\, x^{n-r-1}\, y^r,\ N_1 = -a_n\, x^{n-r-1}\, y^r;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$M_{n-r} = b_{r+1}\, x^{n-r+1}\, y^r + \dots + b_n\, y^{n-1};$$
$$N_{n-r} = -a_{r+1}\, x^{n-r+1}\, y^r + \dots - a_n\, y^{n-1};$$
$$M_{n-r+1} = -b_0\, x^{n-1} - \dots - b_{r-1}\, x^{n-r}\, y^{r-1},$$
$$N_{n-r+1} = a_0\, x^{n-1} + \dots + a_{r-1}\, x^{n-r}\, y^{r-1};$$
$$M_n = -b_0\, x^{n-r}\, y^{r-1},\ N_n = a_0\, x^{n-r}\, y^{r-1}.$$

also nimmt Formel (29) folgende Gestalt an:

$$E^{(r,s)} = \Delta^{(r,s)} \times S^{(r,s)} \equiv \begin{vmatrix} 0 \dots 0 & -b_0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & -b_{r-1} \dots -b_0 \\ b_n \dots b_{r+1} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots b_n & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & a_0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & a_{r-1} \dots a_0 \\ -a_n \dots a_{r+1} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots -a_n & 0 \dots 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_r \dots a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1 \dots a_{n-r+1} & \dots & a_n \\ a_0 \dots a_{n-r} & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots a_1 & \dots & a_r \\ b_r \dots b_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_1 \dots b_{n-r+1} & \dots & b_n \\ b_0 \dots b_{n-r} & \dots & b_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots b_1 & \dots & b_r \end{vmatrix} \qquad (31)$$

wo wir der Symmetrie halber

$$S_{1,2,\ \cdots\ r,\ n+r+1,\ n+r+2,\ \cdots\ 2n}$$

durch $S^{(r,s)}$ ersetzen.

Nach dem Satz XIV ist nun jede Matrix $E^{(r,s)} \equiv R$, und da r jeden Wert der Reihe $0, 1, 2, \cdots n$ annehmen kann, so enthält Formel (31) $(n+1)$ verschiedene Darstellungen derselben Bézout'schen Determinante als Product zweier Matrices.

Nicht weniger Bedeutung hat diese Formel für die Sylvester'sche Determinante. Die allgemeinen n gliedrigen Gleichungen entstehen nämlich bei Elimination der r ersten und der $(n-r)$ letzten Glieder durch lineare Verbindung der Sylvesterschen Gleichungen. Gerade wie eine solche Elimination nach Satz XI von der Bestimmung einer correspondierenden Matrix abhängen kann, so liefert sie umgekehrt, wenn sie schon bekannt ist, nach Satz XII zwei solche correspondierende Matrices, nämlich die folgenden:

$$\Delta^{(r,s)} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -b_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{r-1} & \cdots & -b_0 \\ b_n & \cdots & b_{r+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r-1} & \cdots & a_0 \\ -a_n & \cdots & -a_{r+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad (32)$$

und

$$S_{\overline{r+1,\,r+2,\,\cdots\,r+n}} = \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_{r-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1} & \cdots & a_n \\ b_0 & \cdots & b_{r-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} & \cdots & b_n \end{vmatrix} \qquad (32)$$

Wir haben also eine Matrix, welche der Matrix der ersten r und der letzten $(n-r)$ Colonnen der Sylvester'schen Determinante correspondiert, was auch r sein mag.

Auf diese beiden Formeln (31) und (32) kommen wir später zurück.

5. Noch eine andere Matrix Δ liefert ein interessantes Resultat. Es sei nämlich bei $n = 2n,\ v = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -b_1 & -b_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^n$$

Aus (28) folgt dann $E = \Delta \times S - a_0^n S$.

Andererseits erkennt man durch Vergleich der Colonnen von Δ mit denen in 2. und in 3., dass das entsprechende Gleichungssystem aus den ersten n Sylvester'schen Gleichungen (18) und den n Bézout'schen Gleichungen (19) besteht. D. h. es ist

$$E = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = a_0^n R$$

Daraus folgt $R = S$.

Dieser beiläufig angeführte Beweis hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem von Mansion gegebenen, den wir früher erwähnt haben. Er stellt nämlich auch für den Fall, dass die gegebenen Gleichungen verschiedenen Grades sind, eine Coefficientendeterminante auf, welche wie das obige E die Bézoutsche Determinante als Factor enthält. Er zeigt dann, wie man

das zu dieser Determinante zugehörige Gleichungssystem durch wiederholte Abziehung der Gleichungen von einander in das Sylvester'sche System verwandeln kann, wobei die betreffende Determinante bis auf einen Factor zugleich in die Sylvestersche Determinante übergeht. Daraus schliesst er die zu beweisende Gleichheit von R und S.

Noch grössere Ähnlichkeit hat der obige Beweis mit dem schon erwähnten Verfahren von Dölp und von Muir. Sie multiplicieren beide eine Sylvester'sche Determinante mit einer andern Determinante, welche wesentlich dieselbe ist, wie unser specielles Δ, und beweisen dann wie oben, dass $R-S$ ist. Sie gehen aber nicht näher auf diese wichtigen Relationen ein.

Die Gleichungen (19) entstehen aus den Gleichungen (18) durch eine nicht umkehrbare lineare Verbindung. Erst wenn wir den Bézout'schen Gleichungen gewisse n andere hinzufügen, wird die Beziehung des Systems zu dem Sylvesterschen eine gegenseitige, erst dann haben beide Systeme dieselbe Bedeutung.

Das betreffende Gleichungssystem ist eine Mittelform zwischen (18) und (19); ein ähnliches System bekommt man ebenso gut, wenn man von den allgemeinen n gliedrigen Gleichungen ausgeht. Fügt man den Bézout'schen Gleichungen nur einige der n anderen hinzu, so bildet man Systeme, welche irgend m aufeinander folgende Glieder enthalten, wo $n<m<2n$. Auch solche Gleichungssysteme würden entsprechende Paare correspondierender Matrices ergeben, welche wir aber auf andere Weise aufstellen wollen.

Sämtliche Resultate, welche wir im Vorigen von Gleichungssystemen und Elimination auf Matrices übertragen haben, lassen sich auch direct gewinnen. Der Uebergang ist mittelst der Sätze XI und XII und der Formel (28) geschehen, für die eigentliche Matrixtheorie kommen hauptsächlich frühere Sätze des ersten Teils in betracht. Die directe Berechnung einer correspondierenden Matrix ist zwar nicht schwierig, jedoch etwas umständlich; dagegen ist die indirecte Methode im vorliegenden Falle darum besonders einfach, weil wir die Bézoutschen Gleichungen schon kennen, die allgemeinen n-gliedrigen Gleichungen leicht ableiten können, und dann mit Hülfe der Sätze XI, XII die Beziehungen zwischen den Matrices direct ablesen.

Satz XV. Die Auffassung der allgemeinen Gleichungen $M_i f + N_i \varphi = 0$ als lineare Verbindungen der in den Grössen x^{2n-1}, $x^{2n-2}y$, ... y^{2n-1} selbst linearen Sylvester'schen Gleichungen vermittelt mit Hülfe der Sätze XI und XII den Uebergang von der Theorie der Gleichungssysteme zu derjenigen der zugehörigen Matrices. Die Coefficientenmatrix E der μ Gleichungen $M_i f + N_i \varphi = 0$ entsteht nämlich aus der Sylvester'schen Determinante, eventuell aus der Matrix gewisser Colonnen derselben, durch Multiplication mit der Coefficientenmatrix Δ der M_i, N_i. Bilden die Coefficienten eines Paares M_i, N_i eine Colonne von Δ, so hat man Colonnen mit Colonnen zu multiplicieren.

Satz XVI. Insbesondere hat man einerseits nach dem Satz XIV $(n+1)$ verschiedene Darstellungen der Bézout'schen Determinante als Product 2-er Matrices, andererseits mit Hülfe des Satzes XII eine Matrix, welche derjenigen der ersten r und der letzten $(n-r)$ Colonnen der Sylvester'schen Determinante correspondiert.

Drittes Kapitel.

Formverhältnisse der Matrices.

1. Einleitung.

In dem zweiten Kapitel sind wir bei der Betrachtung gewisser Gleichungssysteme auf besonders wichtige Resultate für die zugehörigen Coefficientendeterminanten gekommen.

Die Systeme von je n n-gliedrigen Gleichungen (27), einschliesslich des Bézout'schen Systems selbst, haben nämlich ein und dieselbe Coefficientendeterminante R, und da diese Gleichungen lineare Verbindungen der $2n$ Sylvester'schen Gleichungen sind, so lässt sich diese Bézout'sche Determinante nach Satz XI auf $(n+1)$ Weisen als Product 2-er Matrices $\Delta^{(r,s)}$ und $S^{(r,s)}$ darstellen.

Es werden ferner bei den genannten linearen Verbindungen die ersten r und die letzten $(n-r)$ Glieder aus den Sylvester'schen Gleichungen eliminiert.

Demnach entsteht die zweite Matrix in jedem der Producte aus der Sylvester'schen Determinante S durch Unterdrückung der ersten r und der letzten $(n-r)$ Colonnen, während die andere Matrix $\Delta^{(r,s)}$ diejenige der betreffenden linearen Ver-

bindungen ist. Zweitens sind die letztgenannte Matrix und diejenige der n unterdrückten Colonnen von S nach Satz XII correspondierende Matrices; mit anderen Worten, wir haben für die Matrix der ersten r und der letzten $(n-r)$ Colonnen der Sylvester'schen Determinante eine correspondierende Matrix gefunden.

Wegen der besonderen Form der Sylvester'schen Gleichungen enthalten je zwei solche Matrices bis auf die Vorzeichen dieselben Elemente.

Von diesen Resultaten ausgehend, wollen wir im Folgenden mit wenig Rücksicht auf die entsprechenden Gleichungssysteme einige Eigenschaften der betreffenden Matrices näher studieren.

Bevor wir aber weitere Beziehungen zwischen den beiden Determinanten ableiten, wollen wir in diesem dritten Kapitel gewisse rein formelle Eigenschaften der in betracht kommenden Matrices als Hülfsmittel für die spätere Entwickelung auseinander setzen.

Diese Eigenschaften beruhen meistens auf der Anzahl und der Lage der Nullen und der wiederholten Elemente in der Sylvester'schen Determinante. Es werden dementsprechend immer specielle Matrices vor den übrigen bevorzugt, während sich die Gründe dieser Auszeichnung erst bei der Anwendung in den folgenden Kapiteln ergeben werden. Bisweilen schreiben wir den Wert von n als Argument nach dem Symbol der betreffenden Matrix[1]).

Neben den formellen Eigenschaften beweisen wir eine wichtige Beziehung zwischen zweiten und vierten Unterdeterminanten der Sylvester'schen Determinante. Dieselbe ist kürzlich in einer interessanten Abhandlung[2]) von Netto auf andere Weise bewiesen worden.

2. Umkehrung.

Es ist schon erwähnt worden, dass die beiden correspondierenden Matrices

$$\Delta^{(r,s)} \text{ und } S_{\overline{r+1, r+2, \cdots r+n}}$$

von Formel (32) abgesehen von den Vorzeichen aus denselben Elementen bestehen.

1) Bei solchen zusammengesetzten Symbolen wie z. B. $S^{(r,s)}_{\overline{(n)}\,\overline{\varkappa_1 \varkappa_2}}$ kommt erst das Argument, zweitens die oberen Indices, endlich die unteren Indices in betracht.

2) Crelle's Journal, Bd. 104.

Wir wollen nun die Anordnung dieser Elemente etwas näher betrachten, beschränken uns dabei aber der Übersichtlichkeit halber auf den Fall $n = 4$.

Es correspondieren dann erstens die beiden Matrices

$$\Delta^{(4,0)} = \begin{vmatrix} -b_0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_0 & 0 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad S_{\overline{5,6,7,8}} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}$$

zweitens die Matrices

$$\Delta^{(3,1)} = \begin{vmatrix} 0 & -b_0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad S_{\overline{4567}} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix}$$

endlich die Matrices

$$\Delta^{(0,4)} = \begin{vmatrix} b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & b_4 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & -a_4 & -a_3 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_4 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad S_{\overline{1234}} = \begin{vmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

Vergleichen wir nun die correspondierenden Matrices, so sehen wir:

1. $\Delta^{(4,0)}$ und $S_{\overline{5\,6\,7\,8}}$ entstehen aus einander durch Umkehrung sämtlicher Zeilen und Colonnen und Zeichenwechsel bei allen Elementen b_i.

2. $\Delta^{(0,4)}$ und $S_{\overline{1\,2\,3\,4}}$ entstehen aus einander durch Umkehrung sämtlicher Zeilen und Colonnen und Zeichenwechsel bei allen Elementen a_i.

Um die compliciertere Relation zwischen $\Delta^{(3,1)}$ und $S_{\overline{4\,5\,6\,7}}$ zu definieren, führen wir folgende Bezeichnung ein:

dem beliebigen Minor $M_{\substack{i_1\,i_2\cdots i_\nu \\ \varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_\mu}}$ irgend einer Matrix M von n Zeilen und m Colonnen ordnen wir den anderen Minor

$$M_{\substack{i_{\nu+1}\,i_{\nu+2}\cdots i_n \\ \varkappa_{\mu+1}\varkappa_{\mu+2}\cdots\varkappa_m}}$$

zu, deren Indices mit den früheren eine vollständige Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bezw. $1, 2, \ldots m$ bilden; und diese beiden Minoren nennen wir zugehörig. Unterdrückt man zwei zugehörige Minoren einer Matrix, so bleibt noch ein Paar zugehöriger Matrices übrig, nämlich

$$M_{\substack{i_1\,i_2\cdots i_\nu \\ \varkappa_{\mu+1}\varkappa_{\mu+2}\cdots\varkappa_m}} \quad \text{und} \quad M_{\substack{i_{\nu+1}\,i_{\nu+2}\cdots i_n \\ \varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_\mu}}$$

Insbesondere enthalten die beiden Matrices $\Delta^{(3,1)}$ und $S_{\overline{4\,5\,6\,7}}$ je zwei zugehörige Matrices von lauter Nullen, nämlich

$$\Delta^{(3,1)}_{\substack{1\,2\,3\,5\,6\,7 \\ 1}} = \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \quad \text{und} \quad \Delta^{(3,1)}_{\substack{4\,8 \\ 2\,3\,4}} = \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|$$

(wo die Indices sich auf $\Delta^{(3,1)}$, nicht auf Δ beziehen), und analog für $S_{\overline{4\,5\,6\,7}}$.

Ebenso haben die beiden allgemeinen Matrices $\Delta^{(r,s)}$ und $S_{\overline{r+1,\cdots r+n}}$ je zwei zugehörige Matrices von lauter Nullen, ausgenommen die beiden Grenzfälle, $r = 0$ und $r = n$.

Nun fahren wir mit dem Vergleich fort:

$\Delta^{(3,1)}$ und $S_{\overline{4\,5\,6\,7}}$ entstehen aus einander, wenn man erstens jede Zeile umkehrt, zweitens jede Colonne derjenigen beiden zugehörigen Matrices umkehrt, welche übrig bleiben, wenn man die beiden zugehörigen Matrices von lauter Nullen unterdrückt, drittens das Vorzeichen jedes a_i oder b_i wechselt,

je nachdem $i > 3$ oder $i < 3$ ist. Mit Rücksicht auf die Formel (32) stellen wir demnach folgende allgemeine Definition auf:

Definition. Wir bezeichnen kurz als Umkehrung die Gesamtheit folgender Operationen, durch welche die correspondierenden Matrices $\mathcal{A}^{(r,s)}$ und $S_{\overline{r+1, r+2, \cdots r+n}}$ in einander übergeführt werden: erstens, Umkehrung jeder Zeile; zweitens, Umkehrung jeder Colonne derjenigen beiden zugehörigen Matrices, welche mit zwei zugehörigen Nullenmatrices die betreffende Matrix bilden; drittens Zeichenwechsel bei jedem a_i oder b_i, je nachdem $i > r$ oder $i < r$ ist. In den beiden Grenzfällen $r = 0$, $r = n$ bezieht sich die zweite Operation auf die Colonnen der ganzen Matrix.

$\mathcal{A}^{(r,s)}$ und $S_{\overline{r+1, r+2, \cdots r+n}}$ nennen wir Umkehren von einander. In diesem speciellen Sinne brauchen wir im Folgenden die beiden Worte Umkehr und Umkehrung.

Was den Proportionalitätsfactor bei den correspondierenden Matrices $\mathcal{A}^{(r,s)}$ und $S_{\overline{r+1, r+2, \cdots r+n}}$ angeht, so ist die Determinante der ersten n Zeilen von

$$\mathcal{A}^{(r,s)} \quad \text{gleich} \quad (-1)^{rs} (-b_0)^r b_n^s$$

die correspondierende Determinante in der Umkehr ist gleich $b_0^r b_n^s$, also ist der Proportionalitätsfactor

$$\varrho = (-1)^{r(s+1)} \qquad (33)$$

Ferner lassen sich die $(n+1)$ Matrices $\mathcal{A}^{(r,s)}$ und die correspondierenden Matrices $S_{\overline{r+1, r+2, \cdots r+n}}$ nach geeigneter Umordnung der Colonnen je in ein Schema zusammenfügen, wobei die Correspondenzzuordnung deutlicher hervortritt. Wir bezeichnen der Kürze halber die Matrix der ersten oder der letzten μ Colonnen einer Matrix von 2μ Colonnen als erste bezw. zweite Colonnenhälfte und geben dann von der schematischen Darstellung zwei Beispiele.

1. $n = 3$. Schreibt man S in der Form

$$S = \begin{array}{cccccc} S_{\overline{456}} & S_{\overline{345}} & S_{\overline{234}} & S_{\overline{123}} & & \\ \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & b_3 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 \\ b_0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 \end{array}$$

d. h. kehrt man sämtliche Zeilen beider Colonnenhälften um, so bilden nach Formel (31) je drei auf einander folgende Colonnen in anderer Reihenfolge eine der vier Matrices $S_{\overline{r+1,r+2,r+3}}$ wie an dem Schema selbst angegeben.

2. Die vier Matrices $\Delta^{(r,s)}$ lassen sich nicht so einfach zusammenfügen; betrachten wir aber das Schema

$$[\Delta(3)] = \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & & & & & & \Delta^{(3,0)} \\
-b_0 & 0 & 0 & & & & & & \\
\hline
-b_1 & -b_0 & 0 & 0 & & & \Delta^{(2,1)} & & \\
\hline
-b_2 & -b_1 & -b_0 & 0 & 0 & & & \Delta^{(1,2)} & \\
\hline
a_0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & & & \Delta^{(0,3)} \\
a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & & & \\
a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_3 & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & & & \\
 & & 0 & 0 & -a_3 & -a_2 & & & \\
 & & & 0 & 0 & -a_3 & & &
\end{array}\right|$$

so enthalten je drei auf einander folgende Colonnen in anderer Reihenfolge die Colonne einer der vier $\Delta^{(r,s)}$, wie an dem Schema bezeichnet.

Dieses sechseckige Schema kann man sich so entstanden denken, dass man zunächst die beiden Matrices $\Delta^{(3,0)}$ und $\Delta^{(0,3)}$ neben einander stellt, dann letztere um drei Reihen nach unten verschiebt, und das Sechseck durch Nullen ergänzt.

$n = 4$. Wir schreiben nun:

$$S(4) = \left|\begin{array}{cccccccc}
S_{\overline{5678}} & S_{\overline{4567}} & S_{\overline{3456}} & S_{\overline{2345}} & S_{\overline{1234}} & & & \\
\diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & & & \\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\
a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 \\
a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\
a_0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\
b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\
b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 \\
b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\
b_0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1
\end{array}\right|$$

$$[\Delta(4)] = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & & & & \Delta^{(1,0)} \\
-b_0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & \Delta^{(3,1)} & & \\
-b_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & \Delta^{(2,2)} & \\
-b_2 & -b_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & \Delta^{(1,3)} \\
-b_3 & -b_2 & -b_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & \Delta^{(0,4)} \\
a_0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\
a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\
a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 \\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\
 & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\
 & & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & a_4
\end{array}\right|$$

wo wiederum correspondierende Matrices unter einander stehen.

Mit Hülfe der eben eingeführten Bezeichnungen wollen wir nun die schon in Satz XVI angedeuteten Resultate kurz formuliren, aber zuerst eine kleine Verallgemeinerung eines derselben geben.

Für die Matrix der ersten r und der letzten s Colonnen der Sylvester'schen Determinante kennen wir unter der Bedingung $r+s=n$ eine correspondierende, nämlich ihre Umkehr $\Delta^{(r,s)}$. Lassen wir die genannte Bedingung fallen, so können wir analoge correspondierende Matrices $\Delta^{(r,s)}$ nun direct aufstellen. Es sei z. B. $n=4, r=1, s=2$; dann correspondieren die beiden Matrices

$$S_{\overline{23456}} \left|\begin{array}{ccc}
a_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & a_4 & 0 \\
0 & a_3 & a_4 \\
b_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & b_4 & 0 \\
0 & b_3 & b_4
\end{array}\right| \quad \text{und} \quad \Delta^{(1,2)} = \left|\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & -b_0 & 0 \\
b_4 & b_3 & b_2 & -b_1 & -b_0 \\
0 & b_4 & b_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\
-a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \\
0 & -a_4 & -a_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -a_4 & 0 & 0
\end{array}\right|$$

Ihre Correspondenz folgt nämlich nach Seite 4 aus der Correspondenz der Matrices

$$S_{\substack{26\\23456}} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 \\ b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 \\ 0 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \text{ und } \Delta^{(1,2)}_{\substack{26\\15}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_0 \\ b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \\ -a_4 & -a_3 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

da die Determinante

$$\Delta^{(1,2)}_{\substack{1\,3\,4\,5\,7\,8\\2\,3\,4}} = \begin{vmatrix} b_4 & -b_0 \\ -a_4 & a_0 \end{vmatrix}$$

allgemein von Null verschieden ist. Die verschiedenen Matrices $\Delta^{(r,s)}$ und $S_{\overline{r+1, r+2, \cdots 2n-s}}$, lassen sich bei $r+s=v$, auch wenn $v<u$ ist, je in ein Sechseck zusammenfügen.

Es ist $\Delta^{(r,s)}$ nicht mehr die Umkehr von $S_{\overline{r+1, r+2, \cdots 2n-s}}$, vielmehr entsteht $\Delta^{(r,s)}$ durch einen etwas anderen Umkehrprocess aus der Matrix $S_{\overline{u-s+1, u-s+2, \cdots n+r}}$. Auf diese erweiterte Umkehrung gehen wir nicht näher ein.

Satz XVII. Das Product der Matrix irgend u auf einander folgender Colonnen der Sylvester'schen Determinante mit der Umkehr der Matrix der übrigen Colonnen ist constant und gleich der Bézout'schen Determinante. Formel (31).

Satz XVIII. Die Matrix der ersten r und der letzten $(n-r)$ Colonnen der Sylvester'schen Determinante und ihre Umkehr correspondieren einander für alle Werte $r=0, 1, \ldots . n$ mit dem Proportionalitätsfactor ± 1. Man kann allgemein eine Matrix hinschreiben, welche derjenigen der ersten r und der letzten s Colonnen der Sylvester'schen Determinante correspondiert, so lange $r+s \leqq n$ ist. Diese Correspondenz entspricht nach Satz XI der Elimination der ersten r und der letzten s Glieder aus den Sylvester'schen Gleichungen.

3. Die Sylvester'schen Matrices.

Unter den Matrices, welche in der Sylvester'schen Determinante vorkommen, gibt es noch weitere ausser den Matrices $S^{(r,s)}$, welche wir auszeichnen wollen. Einer früheren Bezeich-

nung entsprechend nennen wir die Matrix der ersten μ oder der letzten μ Zeilen einer Matrix von $2\,\mu$ Zeilen die erste oder die zweite Zeilenhälfte.

Unterdrücken wir in beiden Zeilenhälften der Sylvester-schen Determinante die erste Zeile und die erste Colonne oder die letzte Zeile und die letzte Colonne, so erhalten wir die beiden Zeilenhälften einer neuen Matrix von $(2n-2)$ Zeilen und $(2n-1)$ Colonnen. Diese Matrix, welche in der ursprünglichen Determinante zweimal enthalten ist, und eine analoge Gestalt hat, zeichnen wir von den übrigen in S enthaltenen Matrices aus durch die Benennung erste Sylvester'sche Matrix.

Beispiel, $n=4$:

$$S(4)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

Dann ist die erste Sylvester'sche Matrix

$$S'(4)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

Unterdrücken wir zweitens die erste Zeile und die erste Colonne in beiden Zeilenhälften der neuen Matrix S', oder die letzte Zeile und die letzte Colonne derselben, so erhalten wir die beiden Zeilenhälften einer Matrix von $(2n-4)$ Zeilen und $(2n-2)$ Colonnen, welche wir die 2-te Sylvester'sche Matrix nennen wollen. Dieselbe Matrix erhalten wir, wenn wir in beiden Zeilenhälften der Sylvester'schen Determinante die ersten beiden oder die letzten beiden, oder die erste und die letzte Zeile und Colonne auslassen.

Beispiel:

$$S''(4) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= S_{\substack{1256\\12}} = S_{\substack{1458\\18}} = S_{\substack{3478\\78}}$$

Diesen beiden Fällen entsprechend stellen wir nun folgende allgemeine Definition auf:

Definition. Die v-te Sylvester'sche Matrix $S^{(v)}$ ist diejenige, deren beide Zeilenhälften aus denen der Sylvester'schen Determinante s entstehen, wenn man in diesen die ϱ ersten und die $\sigma = v - \varrho$ letzten Zeilen und Colonnen unterdrückt. Diese Matrix hat $(2n - 2v)$ Zeilen und $(2n - v)$ Colonnen, sie kommt in s den verschiedenen Werten $\varrho = 0, 1, \ldots . v$ entsprechend $(v + 1)$-mal vor.

Es ist z. B. bei $n = 4$

$$S'''(4) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= S_{\substack{123567\\123}} + S_{\substack{124568\\128}} + S_{\substack{134578\\178}} + S_{\substack{234678\\678}}$$

und allgemein hat die v-te Sylvester'sche Matrix die Gestalt:

$$S_{(n)}^{(v)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-v-1} & \cdots & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-v-2} & \cdots & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & \cdots & a_{v+1} & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-v-1} & \cdots & b_n & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-v-2} & \cdots & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & \cdots & b_{v+1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$S_{\substack{1,2,\cdots v,n+1,n+2,\cdots n+v\\1,2,\cdots v}} \qquad S_{\substack{1,2,\cdots v-1,n,\cdots n+v-1,2n\\1,2,\cdots v-1,2n}}$$

$$\cdots \qquad S_{\substack{n-v+1,\cdots n,2n-v+1,\cdots 2n\\n-v+1,\cdots 2n}}$$

Einige für die Folge wichtige Identitäten folgen aus diesen Definitionsformeln.

Es ist z. B.

$$S'_{\varkappa} = S_{\substack{1,\,n+1\\1,\,\varkappa+1}} \cdot S_{\substack{n,\,2n\\\varkappa,\,2n}} \tag{34}$$

und ebenso

$$S''_{\varkappa_1,\,\varkappa_2} = \left.\begin{array}{l} S_{\substack{1,\,2,\,n+1,\,n+2\\1,\,2,\,\varkappa_1+2,\,\varkappa_2+2}} \\ S_{\substack{1,\,n,\,n+1,\,2n\\1,\,\varkappa_1+1,\,\varkappa_2+1,\,2n}} - S_{\substack{n-1,\,n,\,2n-1,\,2n\\\varkappa_1,\,\varkappa_2,\,2n-1,\,2n}} \end{array}\right\} \tag{35}$$

u. s. w.

Verstehen wir unter $S^{(r,\,s)}$, wie bei S diejenige Matrix, welche aus S' entsteht, wenn man die ersten r und die letzten s Colonnen unterdrückt, so ist

$$S'^{(r,\,s)} = S^{(r+1,\,s)}_{1,\,n+1} \cdot S^{(r,\,s+1)}_{n,\,2n}$$

also

$$S'^{(r,\,s)}_{\varkappa} = S^{(r+1,\,s)}_{\substack{1,\,n+1\\\varkappa}} \cdot S^{(r,\,s+1)}_{\substack{n,\,2n\\\varkappa}} \tag{36}$$

und andererseits,

$$S'^{(r,\,s)}_{\varkappa} = S'_{\overline{1,\,2,\,\cdots\,r,\,r+\varkappa,\,2n-s,\,2n-s+1,\,\cdots\,2n-1}} \tag{36'}$$

Die Indices der unterdrückten Colonnen beziehen sich hierbei auf $S'^{(r,\,s)}$ u. s. w. nicht auf S. Analog ist:

$$S''^{(r,\,s)} = S^{(r+2,\,s)}_{1,\,2,\,n+1,\,n+2} = S^{(r+1,\,s+1)}_{1,\,n,\,n+1,\,2n} = S^{(r,\,s+2)}_{n-1,\,n,\,2n-1,\,2n}$$

und

$$S''^{(r,\,s)}_{\varkappa_1,\,\varkappa_2} = S''_{\overline{1,2,\cdots r,\,r+\varkappa_1,\,r+\varkappa_2,\,2n-s-1,\cdots 2n-2}} \tag{37}$$

$$\left.\begin{array}{l} = S^{(r+2,\,s)}_{\substack{1,\,2,\,n+1,\,n+2\\\varkappa_1\,\varkappa_2}} = S^{(r+1,\,s+1)}_{\substack{1,\,n,\,n+1,\,2n\\\varkappa_1,\,\varkappa_2}} \\ = S^{(r,\,s+2)}_{\substack{n-1,\,n,\,2n-1,\,2n\\\varkappa_1\,\varkappa_2}} \end{array}\right\} \tag{37'}$$

Gewisse wichtige Eigenschaften der Sylvester'schen Matrix hängen von der Gestalt einer ihrer Determinanten ab.

Betrachten wir nämlich die Determinante der ersten $(n-v)$ und der letzten $(n-v)$ Colonnen von $S^{(v)}$, so ist dieselbe nur dadurch von der Sylvester'schen Determinante S $(n-v)$ unterschieden, dass jeder Index ihrer zweiten Colonnenhälfte um v grösser ist als in dieser; diese Beziehung wollen wir im Fol-

genden Indexverschiebung nennen. Wir wollen gerade diese unter den verschiedenen Unterdeterminanten von S auszeichnen, indem wir sie die Sylvester'sche Unterdeterminante nennen und mit $S\,(n, v)$ bezeichnen. Es ist

$$S\,(n, v) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-v-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-v-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_{v+1} & & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-v-1} & b_n & & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-v-2} & b_{n-1} & & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 & & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Aus der Definition der v-ten Sylvester'schen Unterdeterminante folgt:

$$(A)\quad \begin{cases} S\,(n, v) = S^{(v)}_{n-v+1,\, n-v+2, \cdots n} \\ \qquad = S_{\substack{1,2,\cdots v,\, n+1,\, n+2, \cdots n+v \\ 1,2,\cdots v,\, n+1,\, n+2, \cdots n+v}} = \cdots \\ \qquad = S_{\substack{n-v+1, \cdots n,\, 2n-v+1, \cdots 2n \\ n-v+1, \cdots n\ 2n-v+1, \cdots 2n}} \end{cases}$$

d. h. durch gleichzeitige Auslassung einerseits der ersten ϱ und der letzten σ Colonnen in beiden Colonnenhälften, andererseits der ersten ϱ und der letzten σ Zeilen in beiden Zeilenhälften einer Sylvester'schen Determinante, entsteht die $(\varrho + \sigma)$-te Sylvester'sche Unterdeterminante.

Insbesondere haben wir

$$S(n, 1) = S'_n \quad \text{und} \quad S(n, 2) = S''_{n-1,\, n} \qquad (38)$$

also

$$S^{(r, s)}_{(n, 1)} = S'^{(r, s)}_{n-r}$$

$$S^{(r, s)}_{(n, 2)} = S''^{(r, s)}_{n-r-1,\, n-r}$$

(wo die r und s sich auf $S\,(n, 1)$ u. s. w. beziehen).

Die v-te Sylvester'sche Unterdeterminante kommt nach Formel (A) in der Determinante selbst $(v + 1)$-mal vor, und hat gewissermassen die Eigenschaften derselben.

Der höchste Index in den ϱ ersten Colonnen von $S\,(n, v)$ ist $(\varrho - 1)$, der kleinste in den $(n - v - \varrho)$ letzten Colonnen $(\varrho + 1)$;

da diese Colonnengruppen also kein gemeinsames Element besitzen, so bilden sie wie bei der Sylvester'schen Determinante eine Matrix, deren Umkehr eine correspondierende Matrix ist.

So haben wir für den Fall $n=4$ die beiden Schemata correspondierender Matrices

$$[S(4,1)] = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 \\ a_0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & b_4 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 \\ b_0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$[\Delta(4,1)] = \begin{vmatrix} -b^0 & 0 & 0 & & & \\ -b_1 & -b_0 & 0 & 0 & & \\ -b_2 & b_1 & -b_0 & 0 & 0 & \\ a_0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_4 \\ & 0 & 0 & -a_4 & -a_3 & -a_2 \\ & & 0 & 0 & -a_4 & -a_3 \\ & & & 0 & 0 & -a_4 \end{vmatrix}$$

Auf diese Correspondenz kommen wir im Folgenden zurück.

Ferner enthält eine Sylvester'sche Unterdeterminante eine Art Sylvester'scher Matrices, welche aus ihr entstehen gerade wie die eigentlichen Sylvester'schen Matrices aus S selbst; erstere Matrices enthalten dann ihrerseits niedrigere Sylvester'sche Unterdeterminanten u. s. f.

Diese Verkleinerungsprocesse, durch welche man aus einer Sylvester'schen Determinante erstens Sylvester'sche Matrices, zweitens Sylvester'sche Unterdeterminanten herausgreift, lassen sich leicht umkehren.

Durch Indexverschiebung um v erhält man zunächst aus einer beliebigen Sylvester'schen Determinante $S(m)$ die v-te Sylvester'sche Unterdeterminante von $S(m+v)$, denn $(m+v)$ ist nun der grösste Index. Schaltet man nun solche v Colonnen

zwischen die beiden Colonnenhälften ein, dass die Indices in jeder Zeile wieder die natürliche Zahlenreihe bilden, so erhält man die v-te Sylvester'sche Matrix $S^{(v)}$ $(m+v)$.

Wie man dann von einer Sylvester'schen Matrix zu der Determinante selbst kommt, erkennt man an den früheren Formeln.

4. Die Minoren der Matrices $\Delta^{(r,s)}$.

Wir hatten im zweiten Kapitel die Formel:

$$\Delta^{(r,s)} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & -b_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & -b_{r-1} & \dots & -b_0 \\ b_n & \dots & b_{r+1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{r-1} & \dots & a_0 \\ -d_n & \dots & -a_{r+1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & -a_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Wie die Sylvester'schen Matrices, so hat auch diese die Eigenschaft, andere Matrices analoger Gestalt zu enthalten. Besonders interessant sind zunächst diejenigen Minoren dieser Matrix, welche durch Auslassung von je v Colonnen entstehen und 2 v Nullenzeilen enthalten.

Unterdrückt man nämlich die s-te Colonne, so bleiben in der n-ten und in der $2n$-ten Zeile lauter Nullen; unterdrückt man die $(s+1)$te Colonne, so bleiben in der ersten und in der $(n+1)$-ten Zeile lauter Nullen. Von den u Matrices $\Delta^{(r,s)}_{i}$ haben bloss diese beiden je zwei Nullencolonnen, nämlich $\Delta^{(r,s)}_{s}$ und $\Delta^{(r,s)}_{s+1}$.

Nach Auslassung der Nullenzeilen hat man erstens

$$\Delta^{(r,s)}_{\substack{n,2n \\ s}} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -b_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{r-1} & \cdots & -b_0 \\ b_n & \cdots & b_{r+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r-1} & \cdots & a_0 \\ -a_n & \cdots & -a_{r+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

zweitens

$$\Delta^{(r,s)}_{\substack{1,n+1 \\ s+1}} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -b_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{r-2} & \cdots & -b_0 \\ b_n & \cdots & b_{r+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r-2} & \cdots & 0 \\ -a_n & \cdots & -a_{r+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Erinnert man sich der Eigenschaft der ersten Sylvesterschen Unterdeterminante von $S(n)$, dass sie nämlich aus der Determinante $S(n-1)$ entsteht durch Indexverschiebung um 1, so erkennt man, dass die Beziehung zwischen der obigen Matrix $\Delta^{(r,s)}_{\substack{n,2n \\ s}}$ und der ersten Unterdeterminante $S(n, 1)$ nichts anderes ist, als die Beziehung zwischen $\Delta^{(r,s-1)}$ $(n-1)$ und $S(n-1)$.

Wir schreiben also

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{(r,s)}_{\substack{n,2n \\ s}} &= \Delta^{(r,s-1)}_{(n,1)} \\ \Delta^{(r,s)}_{\substack{1,n+1 \\ s+1}} &= \Delta^{(r-1,s)}_{(n,1)} \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

D. h. die Matrix $\Delta^{(r,s)}_{s\ n,2n}$ ist die Umkehr der ersten r und der letzten $(s-1)$ Colonnen der ersten Sylvester'schen Unterdeterminante; und ebenso ist die zweite der obigen Matrices die Umkehr der ersten $(r-1)$ und der letzten s Colonnen von $S\ (n, 1)$.

Analog ergibt sich, dass die Matrices

$$\Delta^{(r,s)}_{s-1,\ s}\ ,\quad \Delta^{(r,s)}_{s,\ s+1}\ ,\quad \Delta^{(r,s)}_{s+1,\ s+2}$$

und keine andere der Matrices $\Delta^{(r,s)}_{i_1\ i_2}$ je zwei Nullenzeilen enthalten, dass also:

$$\Delta^{(r,s)}_{s-1,\ s\ n-1,\ n,\ 2n-1,\ 2n}\ ,\quad \Delta^{(r,s)}_{s,\ s+1\ 1,\ n,\ n+1,\ 2n}\ ,\quad \Delta^{(r,s)}_{s+1,\ s+2\ 1,\ 2,\ n+1,\ n+2}$$

die Umkehren gewisser Matrices der zweiten Sylvester'schen Unterdeterminante $S(n, 2)$ sind, dass nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^{(r,s)}_{s-1,\ s\ n-1,\ n,\ 2n-1,\ 2n} &= \Delta^{(r,s-2)}_{(n,2)}\\
\Delta^{(r,s)}_{s,\ s+1\ 1,\ n,\ n+1,\ 2n} &= \Delta^{(r-1,s-1)}_{(n,2)}\\
\Delta^{(r,s)}_{s+1,\ s+2\ 1,\ 2,\ n+1,\ n+2} &= \Delta^{(r-2,s)}_{(n,2)}
\end{aligned}\right\}\quad (40)$$

Schon im vorigen Paragraphen haben wir diese Eigenschaft von einem anderen Gesichtspunkt aus erläutert. Es ist nämlich auf Seite 47, 48 gezeigt worden, dass die Matrices der ersten ϱ und der letzten $(n-v-\varrho)$ der v-ten Sylvester'schen Unterdeterminante und die bezüglichen Umkehren einander correspondieren. Es wurde nur nicht hinzugefügt, dass diese Umkehren ebenso in dem Schema der $\Delta^{(r,s)}$ wie die einen correspondierenden Matrices in dem Schema der anderen, d. h. in der ursprünglichen Sylvester'schen Determinante enthalten sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung kann man an dem Beispiel von S. 80 verificieren, oder allgemein erkennen durch Vergleich der Formel (A) und

$$\Delta^{(r,s)}_{\substack{1,2,\cdots v,\, n+1,\, n+2,\cdots n+v \\ s+1,\, s+2,\cdots s+v}} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -b_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{r-v-1} & \cdots & -b_0 \\ b_n & \cdots & b_{r+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r-v-1} & \cdots & a_0 \\ -a_n & \cdots & -a_{r+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

u. s. w.

Es ist nämlich diese Matrix die Umkehr derjenigen der ersten $(r-v)$ und der letzten $(n-r)=s$ Colonnen von $S(n,v)$.

Der Proportionalitätsfactor zwischen correspondierenden Determinanten der Matrix $\Delta^{(r-v,s)}(n,v)$ und ihrer Umkehr ist nach Formel (33)

$$\varrho = (-1)^{(r-v)(s+1)}$$

Satz XIX. In der Sylvester'schen Determinante $S(n)$ befindet sich $(v+1)$-mal eine v-te Sylvester'sche Matrix $S^{(v)}$ von $(2n-2v)$ Zeilen und $(2n-v)$ Colonnen, und in dieser eine v-te Sylvester'sche Unterdeterminante, welche sich nur durch Indexverschiebung von der Sylvester'schen Determinante $S(n-v)$ unterscheidet. Hierbei kann v jeden Wert der Reihe $1, 2, \cdots (n-1)$ annehmen. Die Matrix der ersten ϱ und der letzten $(n-v-\varrho)$ Colonnen der v-ten Sylvester'schen Matrix oder was dasselbe ist, die Matrix der ersten ϱ und der letzten $(n-v-\varrho)$ Colonnen der v-ten Sylvester'schen Unterdeterminante correspondiert demnach ihrer eigenen Umkehr mit dem Proportionalitätsfactor ± 1. Diese Umkehren sind dann ihrerseits Minoren der Matrices $\Delta^{(r,s)}(n)$ und unterscheiden sich nur durch Indexverschiebung von den Matrices

$$\Delta^{(r-v,s)}(n-v),\ \Delta^{(r-v-1,s+1)}(n-v,\ \text{u. s. w.}$$

Satz XX. Unter den Matrices $\Delta^{(r,s)}_{\varkappa}$ gibt es bei gegebenem r oder $\varkappa$ höchstens zwei, welche je zwei Nullenzeilen enthalten, nämlich diejenigen, für welche $\varkappa = s$ oder

$\varkappa = s + 1$ ist; unter den Matrices $\Delta^{(r,s)}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ gibt es dem analog höchstens drei mit je vier Nullenzeilen, nämlich $\Delta^{(r,s)}_{s-1,s}$, $\Delta^{(r,s)}_{s,s+1}$, $\Delta^{(r,s)}_{s+1,s+2}$ u. s. f. Durch Auslassung dieser Nullenzeilen erhält man dann die in dem vorigen Satze genannten Minoren von $\Delta^{(r,s)}$.

5. Matrices, welche den Sylvester'schen Matrices correspondieren.

Nachdem wir im Vorigen gewisse Minoren der Sylvester-schen Determinanten sowie ihre bezüglichen Umkehren behandelt haben, betrachten wir nun eine Reihe besonders interessanter Matrices, welche den Sylvester'schen Matrices der Reihe nach correspondieren.

Es wurde schon im ersten Kapitel erwähnt, dass einer Matrix A von u Colonnen und $(n-1)$ Zeilen eine einzeilige Matrix correspondiert, deren u Elemente abgesehen von den Vorzeichen gerade die Werte der n Determinanten von A sind. Diesen Satz wollen wir nun im speciellen Falle der ersten Sylvester'schen Matrix, welche $(2n-2)$ Zeilen und $(2n-1)$ Colonnen enthält, anwenden. Wir bezeichnen die $(2n-1)$ Determinanten dieser Matrix mit abwechselnden Vorzeichen genommen der Reihe nach mit

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \cdots \quad \sigma_{2n-1}$$

wo der Index derjenige der jedesmal unterdrückten Colonne von S' ist.

Dann sind

$$S' = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

und

$$\Sigma' = |\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \cdots \ \sigma_{2n-1}|$$

correspondierende Matrices.

Hieraus lässt sich die zu S'' correspondierende Matrix Σ'' ermitteln. Denn damit S' und Σ' einander correspondieren, bestehen folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
a_0 \sigma_1 + a_1 \sigma_2 + \cdots + a_n \sigma_{n+1} &= 0 \\
a_0 \sigma_2 + \cdots + a_{n-1} \sigma_{n+1} + a_n \sigma_{n+2} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_0 \sigma_{n-1} + a_1 \sigma_n + a_2 \sigma_{n+1} + \cdots + a_n \sigma_{2n-1} &= 0 \\
b_0 \sigma_1 + b_1 \sigma_2 + \cdots + b_n \sigma_{n+1} &= 0 \\
b_0 \sigma_2 + \cdots + b_{n-1} \sigma_{n+1} + b_n \sigma_{n+2} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
b_0 \sigma_{n-1} + b_1 \sigma_n + \cdots + b_n \sigma_{2n-1} &= 0
\end{aligned}$$

Lassen wir nun erstens die $(n-1)$-te und die letzte Gleichung, zweitens die erste und die n-te Gleichung aus, so haben wir die beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned}
a_0 \sigma_1 + a_1 \sigma_2 + \cdots + a_n \sigma_{n+1} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_0 \sigma_{n-2} + a_1 \sigma_{n-1} + \cdots + a_n \sigma_{2n-2} &= 0 \\
b_0 \sigma_1 + b_1 \sigma_2 + \cdots + b_n \sigma_{n+1} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
b_0 \sigma_{n-2} + b_1 \sigma_{n-1} + \cdots + b_n \sigma_{2n-2} &= 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_0 \sigma_2 + a_1 \sigma_3 + \cdots + a_n \sigma_{n+2} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_0 \sigma_{n-1} + a_1 \sigma_n + \cdots + a_n \sigma_{2n-1} &= 0 \\
b_0 \sigma_2 + b_1 \sigma_3 + \cdots + b_n \sigma_{n+2} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
b_0 \sigma_{n-1} + b_1 \sigma_n + \cdots + b_n \sigma_{2n-1} &= 0
\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungssysteme sind aber gerade die notwendigen und die hinreichenden Bedingungen, damit folgende beide Matrices einander correspondieren:

$$S'' = \left| \begin{matrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdots & b_3 & b_4 & \cdots & b_n
\end{matrix} \right|$$

$$\Sigma'' \quad \begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{2n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Genau so kann man für jede der Sylvester'schen Matrices $S^{(v)}$ eine correspondierende herstellen, welche nur $(2n-1)$ verschiedene Elemente enthält. Gehen wir wieder zu den $(2n-2)$ Bedingungsgleichungen (S. 54) zurück, und lassen wir von den ersten $(n-1)$ und von den letzten $(n-1)$ Gleichungen einmal die letzten $(v-1)$, einmal die erste und die letzten $(v-2)$, u. s. w. bis schliesslich die ersten $(v-1)$ Gleichungen aus, so bekommen wir Gleichungssysteme mit der gemeinsamen Coefficientenmatrix $S^{(v)}$. Jedes System liefert eine Zeile der correspondierenden Matrix und es ist

$$\Sigma^{(v)} = \begin{vmatrix} \sigma_v & \sigma_{v+1} & \cdots & \sigma_{2n-1} \\ \sigma_{v-1} & \sigma_v & \cdots & \sigma_{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_v \end{vmatrix} \qquad (41)$$

Die Matrices $\Sigma^{(v)}$.

Den $(n-1)$ verschiedenen Sylvester'schen Matrices correspondieren nach dem vorigen Paragraphen der Reihe nach ebenso viele Matrices $\Sigma^{(v)}$ von $1, 2, \cdots (n-1)$ Zeilen und $(2n-1)$, $(2n-2), \cdots (n+1)$ Colonnen, welche aber immer nur $(2n-1)$ verschiedene Elemente enthalten. Wir nehmen noch in Betracht die analoge Determinante n-ter Ordnung

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_n & \sigma_{n+1} & \cdots & \sigma_{2n-1} \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \cdots & \sigma_{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{n+1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{vmatrix}$$

hinzu, weil sie später für die Bézout'sche Determinante besonders wichtig wird.

Wir entwickeln nun einige Eigenschaften zuerst der Determinante Σ, dann der Matrix Σ''. Aus der Gestalt der Determinante Σ erkennen wir, dass

$$\Sigma_{1\ 1} = \Sigma_{n\ n}$$

ist und demnach, dass

$$\Sigma_{1\ i\ \varkappa} = \Sigma_{i-1,\ n\ \varkappa-1,\ n} \qquad (42)$$

ist.

Auf eine Verallgemeinerung dieser Relation brauchen wir nicht näher einzugehen.

Es ist nun zweitens

$$\Sigma'' \quad \begin{matrix} \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{2n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{2n-2} \end{matrix}$$

Bei sämtlichen Determinanten dieser Matrix ist jeder der beiden oberen Indices um 1 grösser als der entsprechende untere Index. Wir zeigen nun, dass jede Determinante

$$\begin{vmatrix} \sigma_\alpha & \sigma_\beta \\ \sigma_\gamma & \sigma_\delta \end{vmatrix}$$

bei welcher $\alpha - \gamma$ $\beta - \delta$ ist, gleich der Summe gewisser Determinanten von Σ'' ist, so lange nur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zwischen 1 und $(2n-1)$ liegen.

Es sei nämlich $\gamma < \alpha, \delta < \beta$; dann folgt:

$$(B) \quad \begin{vmatrix} \sigma_\alpha & \sigma_\beta \\ \sigma_\gamma & \sigma_\delta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_\alpha & \sigma_{\beta-1} \\ \sigma_{\gamma+1} & \sigma_\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{\gamma+1} & \sigma_\beta \\ \sigma_\gamma & \sigma_{\beta-1} \end{vmatrix}$$

und aus dieser Recursionsformel folgt die allgemeine Formel:

$$(C) \quad \begin{vmatrix} \sigma_\alpha & \sigma_\beta \\ \sigma_\gamma & \sigma_\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{\gamma+1} & \sigma_\beta \\ \sigma_\gamma & \sigma_{\beta-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{\gamma+2} & \sigma_{\beta-1} \\ \sigma_{\gamma+1} & \sigma_{\beta-2} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \sigma_\alpha & \sigma_{\delta+1} \\ \sigma_{\alpha-1} & \sigma_\delta \end{vmatrix},$$

wo die $(\alpha - \gamma)$ Determinanten der rechten Seite alle der Matrix Σ'' entnommen sind.

Diese beiden Formeln enthalten eine interessante Eigenschaft der Unterdeterminanten einer Sylvester'schen Determinante. Es ist nach einem bekannten[1]) allgemeinen Satze

$$S_{\substack{i_1 \, i_2 \\ \varkappa_1 \varkappa_2}} = \frac{1}{S} \begin{vmatrix} S_{\substack{i_1 \\ \varkappa_1}} & S_{\substack{i_1 \\ \varkappa_2}} \\ S_{\substack{i_2 \\ \varkappa_1}} & S_{\substack{i_2 \\ \varkappa_2}} \end{vmatrix},$$

eine Relation zwischen ersten und zweiten Unterdeterminanten von S. Nun folgt aber aus der Correspondenz von Σ'' und S'':

$$(D) \quad \pm S''_{\varkappa_1, \varkappa_2} = \varrho \begin{vmatrix} \sigma_{\varkappa_1+1} & \sigma_{\varkappa_2+1} \\ \sigma_{\varkappa_1} & \sigma_{\varkappa_2} \end{vmatrix}.$$

1) Baltzer, S. 58; Gordan, S. 93.

also mit Hülfe der beiden Formeln (B) und (C), erstens:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{\varkappa_1+\lambda} & \sigma_{\varkappa_2+1} \\ \sigma_{\varkappa_1} & \sigma_{\varkappa_3-\lambda+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{\varkappa_1+\lambda} & \sigma_{\varkappa_2} \\ \sigma_{\varkappa_1+1} & \sigma_{\varkappa_2-\lambda+1} \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{\varrho} S''_{\varkappa_1,\varkappa_2} \quad (43)$$

und zweitens:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \begin{vmatrix} \sigma_{\varkappa_1+\lambda} & \sigma_{\varkappa_2+\lambda} \\ \sigma_{\varkappa_1} & \sigma_{\varkappa_2} \end{vmatrix} = \pm [S''_{\varkappa_1,\varkappa_2+\lambda-1} + \\ \pm S''_{\varkappa_1+1,\varkappa_2+\lambda-2} + \cdots + S''_{\varkappa_1+\lambda-1,\varkappa_2}] \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

wo $(\varkappa_1+\lambda)$ und $\varkappa_2$ zu vertauschen sind, falls $\varkappa_1+\lambda > \varkappa_2$ ist.

Es ist diese Eigenschaft der vierten und zweiten Unterdeterminanten von S in der neuesten Zeit auf andere Weise von Netto (S. 37) bewiesen worden, soweit dieselbe durch Formel (D) ausgedrückt wird. Er hat nämlich gezeigt, dass die Determinante, welche wir

$$\begin{vmatrix} \sigma_{\varkappa_1+1} & \sigma_{\varkappa_2+1} \\ \sigma_{\varkappa_1} & \sigma_{\varkappa_2} \end{vmatrix}$$

schreiben, congruent Null (Mod. S) ist; und wir zeigen in der Folge, dass der Proportionalitätsfactor ϱ nichts anderes als S ist.

Wir erwähnen übrigens, dass Determinanten von der Form Σ in (41) den Gegenstand einer Dissertation von H. Hankel[1]) bilden.

Wir bemerken, dass schon die erste der Formeln (43) und (44) eine Recursionsformel für den allgemeinen Fall (44) ist, wie wir sie später anwenden wollen.

Satz XXI. Jeder Sylvester'schen Matrix correspondiert eine Matrix, welche gerade $(2n-1)$ verschiedene Elemente enthält. Diese Elemente sind nämlich gleich, eventuell proportional, den $(2n-1)$ Determinanten der ersten Sylvester'schen Matrix. Aus dieser Correspondenz folgt u. A., dass gewisse vierte Unterdeterminanten von S bis auf einen Proportionalitätsfactor gleich der Differenz von je zwei zweigliedrigen Determinanten sind, deren

1) Ueber eine besondere Klasse der symmetrischen Determinanten. Göttingen 1861.

Elemente zweite Unterdeterminanten von S sind. Umgekehrt ist jede dieser zweigliedrigen Determinanten proportional einer Summe vierter Unterdeterminanten von S. Formeln (43) und (44).

6. Die Bézout'sche Determinante.

Diese Determinante ist überhaupt zu weit reduciert, als dass solche formale Beziehungen wie bei der Sylvester'schen Determinante in hohem Grade stattfänden. Nur zwei Punkte wollen wir kurz erwähnen.

Erstens hat Sylvester[1]) eine interessante Beziehung zwischen der Bézout'schen Determinante und den Determinanten von der Form Σ bemerkt, welche immer aus $(2n-1)$ verschiedenen Elementen gebildet sind. Die Determinante R (2) hat schon diese letztgenannte Eigenschaft; die Determinante R (3) hat diese Eigenschaft, sobald man von dem Element r_{22} eine gewisse Grösse abzieht; ebenso R (4), sobald man von den Elementen der Unterdeterminante

$$\begin{matrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{matrix}$$

gewisse Grössen subtrahiert, welche selbst eine Determinante der betreffenden Art bilden. Kurz, man kann jedes R als durch Uebereinanderlagerung einer Reihe von Determinanten S entstanden denken.

Zweitens ist nach Formel (30)

$$R = \Delta^{(n,o)} \times S^{(n,o)}.$$

Daraus folgt mit Hilfe des Satzes VIII

$$R_{\substack{1\\1}} = \Delta^{(n,o)}_{\substack{1\\1}} \times S^{(n,o)}_{\substack{1\\1}}$$

oder, da nach Satz XX $\Delta^{(n,o)}_{\substack{1\\1}}$ zwei Nullenzeilen enthält, nach Auslassung derselben

$$R_{\substack{1\\1}} = \Delta^{(n,o)}_{1,n+1} \times S^{(n,o)}_{1,n+1}$$

d. h. nach Formel (39)

$$R_{\substack{1\\1}} = \Delta^{(n-1,o)}{}_{(n,1)} \times S^{(n-1,o)}{}_{(n,1)}$$

1) Philosophical Transactions, Bd. 143, London.

Dieses Product bezieht sich auf die erste Sylvester'sche Unterdeterminante $S(n, 1)$ gerade wie das erste Product auf die Sylvester'sche Determinante selbst. Also ist R_1 bis auf eine Indexdifferenz, welche aber wesentlich ist, identisch mit der Bézout'schen Determinante $R(n-1)$.

Wir stellen zum Schluss die wichtigeren Formeln dieses Kapitels zusammen:

1. Es correspondieren als Umkehren von einander die Matrices

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^{(r,s)} \quad \text{und} \quad S_{r+1,\,r+2,\,\cdots\,r+n} \\ \text{mit dem Proportionalitätsfactor } (-1)^{r(s+1)} \end{array}\right\} \quad (45)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^{(\varrho,\sigma)}_{(n,v)} \text{ und } S^{(n,v)}_{\varrho+1,\,\varrho+2,\,\cdots\,(\varrho+n-v)} \qquad S^{(v)}_{\varrho+1,\,\cdots\,\varrho+n-v} \\ \text{wo } \varrho+\sigma = n-v, \\ \text{mit dem Proportionalitätsfactor } (-1)^{\varrho(\sigma+1)} \end{array}\right\} \quad (46)$$

2. Es ist, nach Seite 46,

$$S'_{\varkappa} = S_{1,\,n+1}^{1,\,\varkappa+1} = S_{\varkappa,\,2n}^{n,\,2n} \quad (34)$$

$$S''_{\varkappa_1,\,\varkappa_2} = S_{1,\,2,\,n+1,\,n+2}^{1,\,2,\,\varkappa_1+2,\,\varkappa_2+2} = S_{1,\,n,\,n+1,\,2n}^{1,\,\varkappa_1+1,\,\varkappa_2+1,\,2n} = S_{\varkappa_1,\,\varkappa_2,\,2n-1,\,2n}^{n-1,\,n,\,2n-1,\,2n} \quad (35)$$

$$S'^{(r,s)}_{\varkappa} = S_{1,\,n+1}^{(r+1,s)} = S_{\varkappa,\,2n}^{(r,\,s+1)} \quad (36)$$

$$= S'_{1,\,2\,\cdots\,r,\,r+\varkappa,\,2n-s,\,\cdots\,2n-1} \quad (36')$$

$$S''^{(r,\,s)}_{\varkappa_1,\varkappa_2} = S_{1,\,2,\,n+1,\,n+2}^{(r+2,\,s)} = S_{1,\,n,\,n+1,\,2n}^{(r+1,\,s+1)} = S_{\varkappa_1,\,\varkappa_2,\,2n-1,\,2n}^{(r,s+2)} \quad (37)$$

$$= S''_{1,\,2,\,\cdots\,r,\,r+\varkappa_1,\,r+\varkappa_2,\,2n-s-1,\,\cdots\,2n-2} \quad (37')$$

und nach Seite 47

$$S'_{n} = S_{(n,\,1)}; \quad S''_{n-1,\,n} = S_{(n,\,2)} \quad (38)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\varkappa\,(n,\,1)} = S'_{\varkappa,\,n} \text{ für } \varkappa < n, \; = S'_{n,\,\varkappa+1} \text{ für } \varkappa \geq n \\ S_{\varkappa\,(n,\,2)} = S''_{\varkappa,\,n-1,\,n} \text{ für } \varkappa < n-1, = S''_{n-1,\,n,\,\varkappa+2} \text{ für } n \geq n-1 \end{array}\right\} \quad (38')$$

3. Es enthalten nach S. 83 je zwei Nullenzeilen die Matrices $\Delta^{(r,\,s)}_{s}$ und $\Delta^{(r,\,s)}_{s+1}$, je drei Nullenzeilen die Matrices

$$\Delta^{(r,\,s)}_{s-1,\,s}, \quad \Delta^{(r,\,s)}_{s,\,s+1}, \quad \Delta^{(r,\,s)}_{s+1,\,s+2}$$

Durch Auslassung der Nullenzeilen erhält man die Matrices

$$\underset{s}{\Delta^{(r,s)}_{n,2n}} = \Delta^{(r,s-1)}_{(n,1)} \text{ und } \underset{s+1}{\Delta^{(r,s)}_{1,n+1}} = \Delta^{(r-1,s)}_{(n,1)} \qquad (39)$$

und im zweiten Falle:

$$\left.\begin{aligned} \underset{s-1,s}{\Delta^{(r,s)}_{n-1,n,2n-1,2n}} &= \Delta^{(r,s-2)}_{(n,2)} \\ \underset{s,s+1}{\Delta^{(r,s)}_{1,n,n+1,2n}} &= \Delta^{(r-1,s-1)}_{(n,2)} \\ \underset{s+1,s+2}{\Delta^{(r,s)}_{1,2,n+1,n+2}} &= \Delta^{(r-2,s)}_{(n,2)} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Es correspondieren einander ferner die Matrices:

$$S' \text{ und } \Sigma' \quad \sigma_1\ \sigma_2\ \cdots\ \sigma_{2n-1}$$

$$S'' \text{ und } \Sigma'' = \begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{2n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{2n-2} \end{vmatrix}$$

5. Bei der Determinante

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_n & \sigma_{n+1} & \cdots & \sigma_{2n-1} \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \cdots & \sigma_{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{vmatrix} \qquad (41)$$

ist

$$\underset{1\,\varkappa}{\Sigma_{1\,i}} = \underset{\varkappa-1,n}{\Sigma_{i-1,n}} \qquad (42)$$

6. Es ist endlich:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{\varkappa_1+\lambda} & \sigma_{\varkappa_2+1} \\ \sigma_{\varkappa_1} & \sigma_{\varkappa_2+1-\lambda} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{\varkappa_1+\lambda} & \sigma_{\varkappa_2} \\ \sigma_{\varkappa_1+1} & \sigma_{\varkappa_2+1-\lambda} \end{vmatrix} = \pm\tfrac{1}{\varrho}\, S''_{\overline{\varkappa_1,\varkappa_2}} \qquad (43)$$

und

$$\pm\varrho \begin{vmatrix} \sigma_{\varkappa_1+\lambda} & \sigma_{\varkappa_2+\lambda} \\ \sigma_{\varkappa_1} & \sigma_{\varkappa_2} \end{vmatrix} - [S''_{\overline{\varkappa_1,\varkappa_2+\lambda-1}} + \cdots + S''_{\overline{\varkappa_1+\lambda-1,\varkappa_2}}] \qquad (44)$$

Ist aber $\varkappa_1+\lambda > \varkappa_2$, so schliesst sich die Reihe an der rechten Seite mit dem Gliede $S''_{\overline{\varkappa_2-1,\varkappa_1+\lambda}}$, indem alle folgenden sich gegeneinander aufheben.

Viertes Kapitel.

Relationen zwischen der Sylvester'schen und der Bézout'schen Determinante.

1. Einleitung.

In diesem Kapitel beweisen wir mit Hilfe der früheren Sätze erstens, dass die Bézout'sche Determinante R und die Sylvester'sche Determinante S einander gleich sind, zweitens, dass jede erste Unterdeterminante von R gleich einer gewissen zweiten Unterdeterminante von S ist, dabei, dass unter den n^2 ersten Unterdeterminanten von R nur $(2n-1)$ verschieden sind. Wir zeigen ferner, dass die eben genannten $(2n-1)$ Grössen welche wir mit γ_h bezeichnen wollen, unabhängig von einander sind, indem erstens aus beliebig vorgeschriebenen Werten derselben die Elemente der zugehörigen Bézout'schen Determinante sich eindeutig berechnen lassen, während zweitens aus $(2n-1)$ dieser Elemente $r_{i\varkappa}$ solche Elemente der Sylvester'schen Determinante a_l, b_m sich ergeben, welche mit den übrigen $r_{i\varkappa}$ verträglich sind. D. h. man kann ebenso gut von den $(2n-1)$ unabhängige Grössen γ_h durch die n^2 Grössen $r_{i\varkappa}$ zu den $(2n+2)$ unabhängigen Grössen a_l, b_m übergehen, als umgekehrt von den a_l, b_m durch die $r_{i\varkappa}$ zu den γ_h, bloss mit dem notwendigen Unterschied, dass im ersten Falle die Bestimmung der a_l, b_m keine eindeutige ist.

Diese Resultate sind zum Teil von Jacobi[1]), zum Teil von Mansion[2]) gegeben worden. Insbesondere hat Jacobi gleich im Anfang seiner höchst reichhaltigen Abhandlung die oben genannte Relation zwischen den ersten Unterdeterminanten von R, dass nämlich nur $(2n-1)$ derselben verschieden sind, bewiesen. Er hat aber aus den Coefficienten a_l, b_m keine Determinante S gebildet; demnach hat er den eben genannten Satz, welchen wir in der Folge den Jacobischen Satz nennen werden, nur indirect begründet, indem er zuerst eine gemeinsame Wurzel der gegebenen Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ voraussetzte, dann nachher diese Bedingung fallen liess. Die folgende Darstellung ist dagegen eine directe, d. h. sie enthält nichts von Wurzeln oder von der Bedeutung der Determinanten

1) Crelle's Journal XV.
2) Man siehe S. 26.

als Resultanten, mit welcher eine reine Determinanteneigenschaft zunächst nichts zu thun hat.

Was die weiteren besonders wichtigen Resultate angeht, so ist der Gedankengang von Jacobi ungefähr der folgende:

Nachdem er aus den $(2n+2)$ Coefficienten a_l, b_m die Grössen $r_{i\varkappa}$ und $R_{\substack{i\\ \varkappa}} = \gamma_{n-i+\varkappa}$ abgeleitet hat, zeigt er, dass die Determinante R eine symmetrische ist, dass also bei unserer Darstellung, wo sich die Symmetrie auf die zweite Diagonale bezieht:

$$r_{i\varkappa} = r_{n-\varkappa+1,\, n-i+1} \qquad \text{ist.}$$

Dann bemerkt er, dass bei der Berechnung der $r_{i\varkappa}$ aus den a_i, $b_\varkappa$ gewisse drei der letzteren bis auf Nullwerte willkürlich gewählt werden können, dass also die n- oder mit Rücksicht auf die Symmetrie die $\frac{n(n+1)}{2}$ Grössen $r_{i\varkappa}$ eigentlich nur von $(2n-1)$ unabhängigen Grössen abhängen.

Hieraus folgert er die Existenz von Relationen zwischen den Elementen $r_{i\varkappa}$, welche sich nicht nur durch die Identitäten zwischen den ersten Unterdeterminanten

$$R_{\substack{i\\ \varkappa}} \qquad R_{\substack{i+h\\ \varkappa\pm h}} = \gamma_{n-i+\varkappa}$$

sondern auch durch Identitäten zwischen den höheren Unterdeterminanten von R ausdrücken lassen. Solche Relationen stellt er dann für die einfachsten d. h. die zweigliedrigen Unterdeterminanten von R wirklich auf.

Andererseits zeigt er, wie man aus beliebigen Werten der γ_h sämtliche n^2 Elemente $r_{i\varkappa}$ und aus den $(2n-1)$ Elementen $r_{1\varkappa}, r_{i1}$ nach einer bis auf Nullwert willkürlichen Festsetzung von gewissen drei der $(2n+2)$ Coefficienten, die übrigen a_l, b_m berechnen kann.

Endlich zeigt er mittelst der erwähnten Relationen zwischen den zweigliedrigen Unterdeterminanten von R, dass diejenigen Elemente $r_{i\varkappa}$, welche bei der Berechnung der a_l, b_m unbeachtet blieben, doch identisch sind mit denen, welche durch die erhaltenen Coefficienten a_l, b_m bestimmt sind; dass also die $(2n-1)$ Grössen γ_h unabhängig von einander sind. Bei der Ausführung der betreffenden Beweise werden wir nun in sofern von den einfachen Methoden von Jacobi abweichen, als nötig ist, um den Anschluss an unsere sonstige Darstellung festzuhalten.

Die erwähnten Resultate von Mansion sind in der schon citierten (Seite 26) Schrift enthalten in Anschluss an seinen

oben angeführten Beweis, dass die Determinanten R und S einander gleich sind. Es gelingt ihm auf ganz analoge Weise nachzuweisen, dass in unserer Bezeichnung die Unterdeterminante $R_1 = S'_{n-1+\varkappa}$ ist.

Da es ihm aber hauptsächlich auf die Bedeutung der betreffenden Determinanten bei dem Eliminationsproblem anzukommen scheint, so gibt er wohl absichtlich keine genauen Ausführungen für die übrigen $R_\varkappa$. Sein Resultat, dass jede Unterdeterminante von R sich als lineare Verbindung gewisser Unterdeterminanten von S ausdrücken lässt, dürfte kaum als ein abschliessendes bezeichnet werden ohne die nähere Angabe der Coefficienten. Dass aber in dem allgemeinen Fall zweier Gleichungen verschiedenen Grades so einfache Beziehungen zwischen den verschiedenen Unterdeterminanten bestehen, wie wir sie für den einfacheren Fall nachweisen, ist unwahrscheinlich.

Schliesslich bedarf seine Bemerkung, dass umgekehrt jede Unterdeterminante von S durch geeignete Unterdeterminanten von R ausgedrückt werden kann, wesentlicher Einschränkung.

2. Beweis, dass $R = S$ ist.

Diesen Beweis können wir auf zwei verschiedene Weisen führen, indem wir einmal den ersten, einmal den zweiten Teil des Satzes IX anwenden.

Wir gehen zuerst von der Sylvester'schen Determinante S aus und spalten sie in zwei Matrices, von denen die eine $S^{(r,s)}$ n auf einander folgende Colonnen von S enthält. Dann kennen wir für die andere Matrix $S_{r+1, r+2, \ldots r+n}$ nach Satz XVIII eine correspondierende Matrix, nämlich ihre Umkehr $\Delta^{(r,s)}$. Durch Anwendung des Transformationssatzes IX kommen wir dann auf eines der $(n+1)$ Producte, welche nach Satz XVII der Bézout'schen Determinante gleich sind.

Beispiel $n = 4$. Es ist z. B. bei einfacher Vertauschung der Colonnen von S

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

d. h. $$S = | S^{(1,3)} S_{\overline{2345}} |$$

Die Umkehr von S_{2345} ist nach Formel (45)

$$\Delta^{(1,3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & 0 \\ 0 & b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & -a_4 & -a_3 & 0 \\ 0 & -a_4 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

Nach dem Transformationssatz IX folgt

$$S = \varrho \cdot S^{(1,3)} \times \Delta^{(1,3)}$$

$$= \varrho \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & 0 \\ 0 & b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

wo nach (45), $\varrho = (-1)^4 = 1$ ist.

Also ist nach Formel (31)

$$S \quad \Delta^{(1,3)} \times S^{(1,3)} \quad R.$$

Man kann den anderen Beweis führen, indem man von der Productdarstellung von R in Formel (31) ausgeht, und den ersten Teil des Transformationssatzes statt des zweiten anwendet, eine Methode, welche im Folgenden wiederholt gebraucht wird.

Satz XXII. Die Bézout'sche und die Sylvester'sche Determinante sind einander gleich.

3. Die ersten Unterdeterminanten von R.

Jede Unterdeterminante von R lässt sich (wie schon auf Seite 90 bemerkt) nach Formel (31) und Satz VIII als Product zweier Matrices darstellen. Es ist nämlich

$$R\,{}^{i_1\,i_2\,\cdots\,i_v}_{\varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_v} = A^{(r,\,s)}_{i_1\,i_2\,\cdots\,i_v} \times S^{(r,\,s)}_{\varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_v} \qquad (47)$$

In einigen Fällen lässt sich der Transformationssatz auch auf dieses Product anwenden, ohne dass wir eine neue correspondierende Matrix zu bestimmen brauchen.

Die ersten Unterdeterminanten von R, welche für uns die wichtigsten sind, wollen wir nun ausführlich behandeln; wir beschränken uns zunächst der Übersichtlichkeit halber auf den Fall $n = 4$.

Bei der Darstellung steht uns nach Formel (31) jedesmal die Wahl frei zwischen den folgenden $(n+1) = 5$ Productdarstellungen von R.

$$R = \begin{vmatrix} -b_0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_0 & 0 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & -b_0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b_0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 & -b_0 \\ b_4 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_0 \\ -a_4 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & 0 \\ 0 & b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & 0 \\ 0 & -a_4 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

und

$$R = \begin{vmatrix} b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & b_4 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & -a_4 & -a_3 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_4 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}$$

oder kürzer

$$R = \Delta^{(4,0)} \times S^{(4,0)} = \Delta^{(3,1)} \times S^{(3,1)} =$$
$$= \Delta^{(2,2)} \times S^{(2,2)} = \Delta^{(1,3)} \times S^{(1,3)} = \Delta^{(0,4)} \times S^{(0,4)}$$

Dementsprechend haben wir nach Formel (47)

$$R_{\substack{i \\ \varkappa}} = \Delta^{(4,0)}_{i} \times S^{(4,0)}_{\varkappa} = \Delta^{(3,1)}_{\bar{i}} \times S^{(3,1)}_{\varkappa} = \Delta^{(2,2)}_{i} \times S^{(2,2)}_{\bar{\varkappa}}$$
$$= \Delta^{(1,3)}_{\bar{i}} \times S^{(1,3)}_{\varkappa} = \Delta^{(0,4)}_{\bar{i}} \times S^{(0,4)}_{\varkappa}$$

Unter diesen fünf Producten gibt es allgemein zwei, welche wesentlicher Vereinfachung fähig sind. Die beiden Matrices $\mathit{\Delta}_i^{(4-i,\,i)}$ und $\mathit{\Delta}_i^{(5-i,\,i-1)}$ enthalten nämlich (S. 92) je zwei Nullenzeilen, und man kann diese Zeilen und die entsprechenden Zeilen des anderen Factors auslassen ohne jede Änderung des Productes. Dann lässt sich der Transformationssatz anwenden, und man bekommt jedesmal eine Determinante, welche in der ersten Sylvester'schen Matrix S' enthalten ist, wie man an den Formeln erkennen wird.

Beispiel: $i=1, \varkappa=1$.

Gehen wir von der ersten bezw. von der zweiten Productformel aus, so haben wir:

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{|ccc|ccc|} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_0 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{|ccc|ccc|} -b_0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_0 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right\} =$$

$$= \left| \begin{array}{|ccc|ccc|} -b_0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_0 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \right|$$

oder kürzer mit Hilfe der Formeln (36), (39)

$$R_{\underline{1}\,\underline{1}} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta^{(4,0)}_{\underline{1}} \times S^{(4,0)}_{\underline{1}} = \Delta^{(4,0)}_{\underline{1\,5}} \times S^{(4,0)}_{\underline{1\,5}} \\ \Delta^{(3,1)}_{\overline{1}} \times S^{(3,1)}_{\underline{1}} = \Delta^{(3,1)}_{\underline{4\,8}} \times S^{(3,1)}_{\underline{4\,8}} \end{array} \right\} = \Delta^{(3,0)}_{(4,1)} \times S'^{\,(3,0)}_{\overline{1}}$$

zu $\Delta^{(3,0)}_{(4,1)}$ correspondiert nun nach (46) und (38′) die Umkehr $S_{\overline{4\,5\,6}}{}^{(4,1)} = S'_{\overline{4\,5\,6\,7}}$. So erhalten wir bei der Anwendung des Transformationssatzes folgende Formel:

$$R_{\underline{1}\,\underline{1}} \quad \varrho \begin{vmatrix} a_4 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 & 0 & a_0 & a_1 & \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 & a_0 & \\ b_4 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

d. h. $R_{\underline{1}\,\underline{1}} = \Delta^{(3,0)}_{(4,1)} \times S'^{\,(3,0)}_{\overline{1}} = \varrho \left| S'_{\overline{1234}}\, S'_{\overline{4567}} \right| = S'_{\underline{4}}$,

denn es ist nach Formel (46) $\varrho = (-1)^3 = -1$.

Beispiel 2: $i = 2, \varkappa = 3$.

Es lauten das zweite und das dritte der fünf Producte:

$$R_{\underline{2}\,\underline{3}} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_0 & 0 \\ 0 & -b_1 & -b_0 \\ b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 \\ -a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_3 \\ b_3 & b_4 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & -b_0 & 0 \\ 0 & -b_1 & -b_0 \\ b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 \\ -a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_2 \\ b_2 & b_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_2 \end{vmatrix} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -b_0 & 0 & | & | & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & b_0 & | & | & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_4 & 0 & 0 & | & | & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & a_0 & 0 & | & | & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & | & | & b_1 & b_2 & b_4 \\ -a_4 & 0 & 0 & | & | & b_0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

d. h.

$$R_{\substack{2\\3}} = \left\{ \begin{matrix} \Delta^{(3,1)}_{\overline{2}} \times S^{(3,1)}_{\overline{3}} = \Delta^{(3,1)}_{\substack{1\,5\\2}} \times S^{(3,1)}_{\substack{1\,5\\3}} \\ \Delta^{(2,2)}_{\overline{2}} \times S^{(2,2)}_{\overline{3}} = \Delta^{(2,2)}_{\substack{4\,8\\2}} \times S^{(2,2)}_{\substack{4\,8\\3}} \end{matrix} \right\} = \Delta^{(2,1)}_{(4,1} \times S^{(2,1)}_{3}$$

Der ersten Matrix im letzten Product correspondiert ihre Umkehr, und es ist

$$R_{\substack{2\\3}} = \varrho \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 & a_0 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_4 & 0 & a_0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_3 & 0 & 0 & a_4 \\ b_2 & b_3 & 0 & b_0 & b_1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_4 & 0 & b_0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

d. h. $R_{\substack{2\\3}} = \Delta^{(2,1)}_{(4,1)} \times S'^{(2,1)}_{\overline{3}} \quad \varrho \left| S'_{\overline{1257}} S'_{\overline{3456}} \right| = S'_{5}$

da $\varrho = (-1)^4 = 1$ ist.

Ebenso lässt sich jede erste Unterdeterminante von R in eine Determinante von S', d. h. in eine zweite Unterdeterminante von S verwandeln.

Allgemeiner Fall. Gehen wir von dem i-ten bezw. von dem $(i+1)$-ten Product aus, so ist mit Hilfe der Formeln (39) und (36)

$$R_{\substack{i\\\varkappa}} = \left\{ \begin{matrix} \Delta^{(n-i+1,\,i-1)}_{\;\;i} \times S^{(n-i+1,\,i-1)}_{\;\;\varkappa} & \Delta^{(n-i+1,\,i-1)}_{1,\,n+1} \times S^{(n-i+1,\,i-1)}_{1,\,n+1\;\;\varkappa} \\ \Delta^{(n-i,\,i)}_{\overline{i}} \times S^{(n-i,\,i)}_{\;\;\varkappa} & \Delta^{(n-i,\,i)}_{n,\,2n} \times S^{(n-i,\,i)}_{n,\,2n\;\;\varkappa} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \Delta^{(n-i,\,i-1)}_{(n,\,1)} \times S'^{(n-i,\,i-1)}_{\overline{\varkappa}}$$

Die Anwendung des Transformationssatzes liefert mit Hilfe der Formeln (46) und (36')

$$R_{\substack{i\\ \varkappa}} = A^{(n-i,\,i-1)}_{(n,\,1)} \times S'_{\varkappa}{}^{(n-i,\,i-1)}$$

$$\varrho \,|\, S'_{1,\,2,\,\cdots\,n-i,\,n-i+\varkappa,\,2n-i+1,\,\cdots\,2n-1}\; S'_{n-i+1\,\cdots\,2n-i}$$

wo $\varrho = (-1)^{(n-i)i}$.

Es sind nun die Indices der Colonnen von S', welche in der letzten Determinante vorkommen, der Reihe nach

$$n-i+1,\ \cdots\ n-i+\varkappa-1,\ n-i+\varkappa+1,\ \cdots\ 2n-i,$$
$$1,\,2,\,\cdots\,n-i,\,2n-i+1,\,\cdots\,2n-1\,;$$

und wenn wir die Colonnen gut ordnen, so tritt noch der Factor hinzu:

$$(-1)^{(n-1)(n-i)} \qquad (-1)^{-(n-i)i+n(n-1)-i(i-1)} = (-1)^{-(n-i)i}$$

Daher folgt endlich

$$R_{\substack{i\\ \varkappa}} = S'_{n-i+\varkappa} \qquad (48)$$

wobei nach (34)

$$S'_{n-i+\varkappa} = S_{\substack{1,\,n+1\\ 1,\,n-i+\varkappa+1}} = S_{\substack{n,\,2n\\ n-i+\varkappa,\,2n}} \qquad \text{ist.}$$

Dieses Resultat kann man an den beiden ausgeführten Beispielen verificieren; es war in der That

$$R_{\substack{1\\ 1}} = S'_{4-1+1} = S'_{4} \qquad \text{und}$$

$$R_{\substack{2\\ 3}} = S'_{4-2+3} = S'_{5}$$

Diese Formel betrachten wir nun von zwei etwas verschiedenen Gesichtspunkten aus:

Zunächst enthält sie den Jacobi'schen Satz über die ersten Unterdeterminanten von R. Die rechte Seite hängt nämlich eigentlich bloss von der Differenz zwischen i und $\varkappa$ ab, also hat $R_{\substack{i\\ \varkappa}}$ dieselbe Eigenschaft, d. h. es ist

$$R_{\substack{i\\ \varkappa}} = R_{\substack{i+h\\ \varkappa+h}} \qquad (49)$$

wo h eine beliebige ganze Zahl ist, so lange nur alle Indices zwischen 1 und n inclusive liegen.

Beispiel: Wir haben schon bei $n = 4$ die Unterdeterminante $R_{\frac{2}{3}}$ ausführlich behandelt. Nun ist auf dieselbe Weise:

$$R_{\frac{3}{4}} = \Delta^{(1,3)}_{\overline{3}} \times S^{(1,3)}_{\overline{4}} = \Delta^{(1,3)}_{\substack{4\,8\\3}} \times S^{(1,3)}_{\substack{4\,8\\4}}$$

$$= \Delta^{(1,2)}_{(4,1)} \times S'^{\,(1,2)}_{\overline{4}} = \varrho \left| S'_{\overline{1567}}\, S'_{\overline{2345}} \right| = S'_{\overline{5}}.$$

oder ausführlich:

$$R_{\frac{3}{4}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b_0 \\ b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \\ -a_4 & -a_3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b_0 \\ b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ -a_4 & -a_3 & 0 \\ 0 & -a_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & 0 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

Es ist $R_{\frac{3}{4}} = R_{\frac{2}{3}}$ in Übereinstimmung mit der Formel (49).

Um diese Beziehung zwischen den R_i zu veranschaulichen, bilden wir die adjungierte Determinante von R,

$$\Gamma = |(-1)^{i+\varkappa} R_i| = |\gamma_{i\varkappa}|.$$

Wir dürfen nach Formel (49)

$$(-1)^{i+\varkappa} R_i = \gamma_{i\varkappa} = \gamma_{n-i+\varkappa} \qquad (49')$$

setzen; dann hat Γ folgende einfache Gestalt:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \gamma_n & \gamma_{n+1} & \gamma_{n+2} & \cdots & \gamma_{2n-1} \\ \gamma_{n-1} & \gamma_n & \gamma_{n+1} & \cdots & \gamma_{2n-2} \\ \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n & \cdots & \gamma_{2n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_n \end{vmatrix} \qquad (50)$$

Das Element γ_i kommt i-mal bezw. $(2n-i)$-mal vor, je nachdem $i \leqq n$ oder $i > n$ ist.

Nachdem wir nun die Formel (48) als den Ausdruck einer Eigenschaft der Unterdeterminanten von R allein betrachtet haben, fassen wir sie auf als den Ausdruck einer Beziehung zwischen Unterdeterminanten von R und von S. Dabei sehen wir, dass an der linken Seite der Gleichung jede beliebige erste Unterdeterminante von R vorkommen kann, an der rechten Seite dagegen nur eine solche zweite Unterdeterminante von S, welche der ersten Sylvester'schen Matrix entnommen ist. D. h. die Relation bezieht sich auf alle $(2n-1)$ ersten Unterdeterminanten von R, aber nur auf 2 $(2n-1)$ unter den zweiten Unterdeterminanten von S.

Während alle ersten Minoren von R homogen vom Grade $(n-1)$ in den a_i und in den b_i sind, liegen die Elemente von S so sehr zerstreut, dass nur einige der zweiten Minoren von S denselben Grad in den a_i und den b_i besitzen, und von diesen wiederum nur einige gleich Minoren von R sind.

Was die übrigen zweiten Minoren von S angeht, so mag bemerkt werden, dass sie sich allgemein auf die Determinanten einer kleineren Sylvester'schen Matrix zurückführen lassen. Eine zweite Unterdeterminante ist nämlich die gemeinsame De-

terminante einer Matrix von $(2n-2)$ Zeilen, und einer Matrix von $(2n-2)$ Colonnen der ursprünglichen Determinante. Erstere Matrix enthält bei $n>2$ eine der Sylvester'schen Matrices; und demnach lässt sich die gegebene Unterdeterminante von S nach den Determinanten dieser Matrix entwickeln. Da übrigens sämtliche zweite Unterdeterminanten von S von denselben $(2n+2)$ Grössen a_i, b_i abhängen, so müssen unter ihnen viele Relationen bestehen.

Die $(2n-1)$ Grössen γ_i in Formel (50) dürfen wir nun der Reihe nach gleich den $(2n-1)$ Grössen σ_i von Formel (41) setzen.

Um die Bedeutung der Formel (48) für die Bézout'sche und die Sylvester'sche Determinante auf eine andere Weise zu veranschaulichen, bedienen wir uns des Hilfsmittels der Ränderung. Der ersten Sylvester'schen Matrix fügen wir als erste Zeile die Glieder der binomischen Entwickelung von $(1+x)^{2n-2}$ hinzu:

Setzen wir also:

$$S(x) = \begin{vmatrix} 1 & \binom{2n-2}{1}x & \binom{2n-2}{2}x^2 & \cdots & x^{2n-2} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \quad (51)$$

Analog bilden wir durch Ränderung von R die Determinante:

$$R(x) = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n-1}{1}x & \cdots & x^{n-1} & 0 \\ r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & x^{n-1} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & \binom{n-1}{1}x^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} & 1 \end{vmatrix} \quad (52)$$

Diese beiden Functionen von φ sind identisch. Denn entwickeln wir die Determinante $S(x)$ nach den Elementen der ersten Zeile, so ist der Coefficient von x^h

$$M_h \quad \binom{2n-2}{h} S'_{h+1}$$

Entwickeln wir andererseits die Determinante $R(x)$ nach den Producten der Elemente der ersten Zeile und der letzten Colonne[1]), so ist der Coefficient von x^h, bei $h > n-1$

$$N_h = R_{\substack{1\\h-n+2}} \binom{n-1}{h-n+1}\binom{n-1}{n-1} + R_{\substack{2\\h-n+3}} \binom{n-1}{h-n+2} \times$$
$$\binom{n-1}{n-2} + \cdots + R_{\substack{2n-h-1\\n}} \binom{n-1}{n-1}\binom{n-1}{h-n+1};$$

bei $h < n-1$

$$N_h \quad R_{\substack{n-h\\1}} \binom{n-1}{0}\binom{n-1}{h} + R_{\substack{n-h+1\\2}} \binom{n-1}{1}\binom{n-1}{h-1} +$$
$$\cdots + R_{\substack{n\\h+1}} \binom{n-1}{h}\binom{n-1}{0}$$

Hieraus folgt mit Hülfe der Formel (48) bei $h > n-1$

$$N_h \quad S'_{h+1}\left[\binom{n-1}{h-n+1}\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{h-n+2}\binom{n-1}{n-2} + \cdots\right.$$
$$\left. + \binom{n-1}{h-n+1}\binom{n-1}{n-1}\right]$$

bei $h < n-1$

$$N_h \quad S'_{h+1}\left[\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{h} + \binom{n-1}{1}\binom{n-1}{h} + \cdots + \binom{n-1}{h}\binom{n-1}{0}\right]$$

Die beiden eingeklammerten Summen sind von den speciellen Coefficienten

$$R_{\substack{i\\x}}, \quad S'_{h+1}$$

ganz unabhängig; sie sind in der That gerade die Coefficienten von x^h in dem Product $(1+x)^{n-1}x(1+x)^{n-1}$ in den beiden Fällen $h > n-1$, $h < n-1$.

Da $$(1+x)^{n-1}x(1+x)^{n-1} = (1+x)^{2n-2}$$

ist, so folgt für beide Fälle

$$N_h = \binom{2n-2}{h} S'_{h+1} = M_h$$

und die behauptete Identität

$$\bar{R}(x) = \bar{S}(x)$$

ist nachgewiesen.

Bei der Entwickelung von $R(x)$ fallen alle $R_{\substack{i\\x}}$ welche einander gleich sind, in einen und denselben Coefficienten zusammen.

1) Baltzer, S. 39, Gordan, S. 67.

Will man dagegen auch die gleichen $R_{\varkappa}^{i}$ bei der Entwickelung aus einander halten, so kann man die Potenzen von x in der letzten Colonne durch Potenzen von y ersetzen. Dann ist der Coefficient von $x^{\varkappa} y^{i}$

$$\binom{n-1}{\varkappa}\binom{n-1}{i} R_{\varkappa+1}^{n-i}$$

und es fallen keine $R_{\varkappa}^{i}$ in denselben Coefficienten zusammen.

Die Coefficienten sind aber nicht mehr denen von $S(x)$ eindeutig zugeordnet, eine solche Zuordnung kann man aber dadurch herstellen, dass man die Potenzen von x in der ersten Zeile von $\bar{S}(x)$ durch geeignete homogene Ausdrücke desselben Grades in x und y ersetzt. Die Entwickelungen von $S(x)$ und von der neuen Determinante $\bar{R}(x, y)$ lauten nämlich nach Früherem:

$$S(x) = S'_{\overline{1}} + S'_{\overline{2}}\binom{2n-2}{1} x + \cdots + S'_{\overline{h+1}}\binom{2n-2}{h} x^{h} + \cdots + S'_{\overline{2n-1}} x^{2n-2}.$$

$$\bar{R}(x, y) = R_{1}^{n} + [R_{2}^{n}\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1} x + R_{1}^{n-1}\cdot \binom{n-1}{1}\binom{n-1}{0} y] + \cdots \cdots$$

$$+ [R_{h+1}^{n}\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{h} x^{h} + R_{h}^{n-1}\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{h-1} x^{h-1} y + \cdots + R_{1}^{n-h}\binom{n-1}{h}\binom{n-1}{0} y^{h}] + \cdots$$

$$\cdots + R_{n}^{1} x^{n-1} y^{n-1} \qquad (\text{wo } h \leqq n-1 \text{ ist})$$

wo die eckigen Klammern immer diejenigen $R_{\varkappa}^{i}$ umfassen, welche demselben $S'_{\overline{h}}$ gleich sind.

Man kann nun durch Vergleich dieser Entwickelungen diejenigen homogenen Ausdrücke in x und y ermitteln, welche für die Potenzen von x in der ersten Reihe zu setzen sind. Man hat in der That immer $\binom{2n-2}{h} x^{h}$ durch die Summe der Glieder h-ten Grades in dem Product

$$(1 + x)^{n-1}(1 + y)^{n-1}$$

zu ersetzen. Dann sind die beiden Entwickelungen wiederum identisch, ihre Coefficienten sind einander eindeutig zugeordnet; und die Identität enthält den Jacobi'schen Satz. Uebrigens kann man die Identität direct nachweisen, und daraus sowohl den Jacobi'schen Satz, wie auch die Beziehungen zwischen den $R_i^{\varkappa}$ und den $S_{n-i+\varkappa}$ ableiten.

Man kann endlich den ganzen Übergang von der Productdarstellung einer ersten Unterdeterminante von R zu der zweiten Unterdeterminante von S umkehren, indem man genau wie früher bei den Determinanten selbst (Seiten 92, 93) verfährt. Wir geben für diese umgekehrte Behandlung ein ausführliches Beispiel.

Es sei $n = 4$, und man gehe von der Unterdeterminante aus

$$S_{\substack{15\\16}} = S'_{\overline{5}} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante kann man nun auf solche Weise in zwei Matrices zu je drei Colonnen spalten, dass für eine derselben eine correspondierende Matrix bekannt ist. Dies ist auf drei Weisen möglich. Denn nach (46) hat die Matrix $S'(4)$ die Eigenschaft, dass die Matrix der ersten r und der letzten $s = 3 - r$ Colonnen und ihre Umkehr einander correspondieren. Da in $S'_{\overline{5}}$ die ersten drei und die letzten zwei Colonnen von S' enthalten sind, so kann r jeden der drei Werte 3, 2, 1 annehmen. Wir führen die Rechnung zunächst in dem zweiten dieser drei Fälle aus; es ist nach Transposition der letzten Colonne

$$S'_{\overline{5}} = - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & 0 & a_4 & a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 & b_2 & b_4 \\ 0 & 0 & b_4 & b_0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Der ersten der beiden Matrices correspondiert ihre Umkehr; also folgt nach dem zweiten Teil des Transformationssatzes

$$S'_5 = (-1)^\varrho \begin{vmatrix} 0 & -b_0 & 0 & \vdots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & -b_1 & -b_0 & \vdots & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_4 & 0 & 0 & \vdots & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & a_0 & 0 & \vdots & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & \vdots & b_1 & b_2 & b_4 \\ -a_4 & 0 & 0 & \vdots & b_0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -b_0 & 0 & | & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & -b_1 & -b_0 & | & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_4 & 0 & 0 & | & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & a_0 & 0 & | & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & | & b_1 & b_2 & b_4 \\ -a_4 & 0 & 0 & | & b_0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

denn es ist

$$\varrho = \frac{a_0^2 a_4}{-a_0^2 a_4} = -1 .$$

Vergleichen wir nun dieses Product mit dem zweiten oder mit dem dritten der fünf Productwerte von R auf S. 97, 98, so erkennen wir, dass das vorliegende Product gerade die Unterdeterminante R^{2}_{3} darstellt. In der That haben wir bei einem früheren Beispiel R^{2}_{3} durch dieses Product dargestellt. Es ist also $S'_5 = R^{2}_{3}$. In den übrigen Fällen haben wir ebenso

$$S'_5 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \vdots & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \vdots & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \vdots & a_1 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \vdots & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \vdots & b_2 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \vdots & b_1 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -b_0 & 0 & 0 & | & a_3 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_0 & 0 & | & a_2 & a_4 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & | & a_1 & a_3 & a_4 \\ a_0 & 0 & 0 & | & b_3 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & | & b_2 & b_4 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & | & b_1 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = -R^{1}_{2}$$

und endlich

$$S'_5 \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \vdots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & 0 & \vdots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 & \vdots & 0 & a_0 & a_1 \\ b_0 & 0 & 0 & \vdots & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & 0 & \vdots & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 & b_4 & \vdots & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b_0 \\ b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \\ -a_4 & -a_3 & 0 \\ 0 & -a_4 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = R_{\overset{3}{4}}$$

Die Indices der R_i erkennt man an dem ersten beziehungsweise dem dritten der fünf Producte auf Seite 97 und 98. Ebenso lässt sich jeder andere Fall behandeln.

Bei dieser umgekehrten Methode treten uns zunächst zwei kleine Schwierigkeiten entgegen. Erstens dürfen wir nur von denjenigen zweiten Unterdeterminanten von S ausgehen, welche auch der Matrix S' entnommen sind; zweitens haben wir nicht genau festgestellt, wie man jedesmal die besonderen Productwerte von R wählt, an denen man die Indices der dargestellten R_i zu erkennen hat. Dagegen hat die Methode den Vorteil, dass man von ein und derselben zweiten Unterdeterminante von S ausgehend, durch passende Spaltung derselben allgemein eine ganze Reihe erster Unterdeterminanten von R bekommt.

Satz XXIII. Jede erste Unterdeterminante der Bézoutschen Determinante R ist gleich einer gewissen zweiten Unterdeterminante der Sylvester'schen Determinante S, welche der ersten Sylvester'schen Matrix entnommen ist. (48). Unter den n^2 ersten Unterdeterminanten von R gibt es nur $(2n-1)$ verschiedene. Andererseits ist jede zweite Unterdeterminante von S, welche der Matrix S' entnommen ist, gleich mindestens einer ersten Unterdeterminante von R; erstere Unterdeterminanten kommen in S je zweimal vor.

Was die Zuordnung der zweierlei Unterdeterminanten angeht, so lässt sich durch Ränderung von S' eine Determinante $S(x)$, und durch Ränderung von R eine Determinante $R(x)$ bilden, welche identisch sind. Entwickelt man $S(x)$ und $R(x)$ nach Potenzen von x, so enthält jeder Coefficient der ersten Reihe eines der S'^{-}_{h} und der Coefficient derselben Potenz von x in der zweiten Reihe enthält alle die R_i, welche diesem S'^{-}_{h} gleich sind. (51), (52).
$\varkappa$

Ersetzt man in $S(x)$ und in $\bar{R}(x)$ x zum Teil durch y, so bekommt man zwei Determinanten, deren Identität nicht nur vermöge der bekannten Beziehungen zwischen den Unterdeterminanten besteht, sondern dieselben vielmehr völlig ausdrückt.

4. Unabhängigkeit der $(2n-1)$ verschiedenen ersten Unterdeterminanten von R.

Bevor wir uns der zweiten Unterdeterminante von R zuwenden, wollen wir nun die schon früher angegebenen Sätze von Jacobi über die gegenseitige Abhängigkeit der Systeme der a_l, b_m der $r_{i\varkappa}$ und der γ_h ausführlich beweisen.

An der Productformel (30) für die Bézout'sche Determinante erkennen wir für ein beliebiges Element derselben die Formel

$$r_{i\varkappa} - \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_0 \\ \vdots \\ -b_{n-i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{n-i} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \\ \vdots \\ a_\varkappa \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \\ \vdots \\ b_\varkappa \end{vmatrix}$$

Also ist, wenn wir $\begin{vmatrix} a_i & a_\varkappa \\ b_i & b_\varkappa \end{vmatrix}$ kurz mit $(i, \varkappa)$ bezeichnen, bei $i > \varkappa$

$$r_{i\varkappa} = -b_0 a_{n-i+\varkappa} - b_1 a_{n-i+\varkappa-1} - \cdots - b_{n-i} a_\varkappa$$
$$+ a_0 b_{n-i+\varkappa} + a_1 b_{n-i+\varkappa-1} + \cdots + a_{n-i} b_\varkappa$$
$$(0, n-i+\varkappa) + (1, n-i+\varkappa-1) + \cdots + (n-i, \varkappa).$$

bei $i < \varkappa$

$$r_{i\varkappa} = -b_{-i+\varkappa} a_n - b_{-i+\varkappa+1} a_{n-1} - \cdots - b_{n-i} a_\varkappa$$
$$+ a_{-i+\varkappa} b_n + a_{-i+\varkappa+1} b_{n-1} + \cdots + a_{n-i} b_\varkappa$$
$$(-i+\varkappa, n) + (-i+\varkappa+1, n-1) + \cdots + (n-i, \varkappa).$$

In beiden Fällen folgt

$$r_{i+1,\varkappa+1} - r_{i\varkappa} = (n-i, \varkappa) \quad (\varkappa, n-i)$$

d. h.

$$r_{i+1,\varkappa+1} - r_{i\varkappa} = \begin{vmatrix} a_\varkappa & a_{n-i} \\ b_\varkappa & b_{n-i} \end{vmatrix} \quad (53)$$

Insbesondere bemerken wir die beiden Fälle $i = 0$, und $\varkappa = 0$, wo das zweite Glied fortfällt. Es sind nämlich

$$r_{1\varkappa} = \begin{vmatrix} a_{\varkappa-1} & a_n \\ b_{\varkappa-1} & b_n \end{vmatrix}, \quad r_{i1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i+1} \\ b_0 & b_{n-i+1} \end{vmatrix} \quad (53')$$

wie man übrigens direct an der letzten bezw. der ersten der Productformeln (31) erkennen kann.

An dieser Stelle mag eine der ältesten Arbeiten in dieser Richtung erwähnt werden. Beinahe zu derselben Zeit wie Bézout hat auch Vandermonde[1]) eine ähnliche Eliminationsaufgabe mit grossem Scharfsinn behandelt. Während Bézout mit den Coefficienten $r_{i\varkappa}$ seines Gleichungssystems operierte, hat Vandermonde gerade diese einzelnen zweigliedrigen Determinanten $\begin{vmatrix} a_i & a_\varkappa \\ b_i & b_\varkappa \end{vmatrix}$ zu Grunde gelegt.

Obwohl er wesentlich näher der modernen Determinantentheorie stand als Bézout, und schon die bekannte Identität zwischen Determinanten zweiter Ordnung kannte, hat er doch seine Aufgabe nur für die einfachsten Fälle gelöst.

Während nun die Grössen $r_{i\varkappa}$ scheinbar von $(2n+2)$ Grössen a_l, b_m abhängen, können wir doch drei der letzteren willkürlich wählen ohne irgend welche Änderung der $r_{i\varkappa}$. An

1) Mém. de l'Acad. royale. Paris 1772.

den obigen Formeln erkennt man nämlich, dass die $r_{i\varkappa}$ nur von den Determinanten der $(n-1)$ten Sylvester'schen Matrix

$$S^{(n-1)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \cdots a_n \\ b_0 & b_1 \cdots b_n \end{vmatrix}$$

abhängen.

Ersetzt man also diese Matrix durch irgend eine ähnliche Matrix, so bleiben sämtliche $r_{i\varkappa}$ nach dem Satze III bis auf einen Proportionalitätsfactor ungeändert. Dabei sind die Elemente irgend einer von Null verschiedenen Determinante der neuen Matrix sonst willkürlich; soll der Proportionalitätsfactor $=1$ sein, also die $r_{i\varkappa}$ ganz ungeändert bleiben, so wird eines der vier Elemente durch die anderen bestimmt.

Betrachten wir also die Bézout'sche Determinante als eine zum Teil ausgerechnete Sylvester'sche Determinante, so sehen wir, dass es unendlich viele Sylvester'schen Determinanten gibt, welche sich auf eine und dieselbe Bézout'sche Determinante reducieren lassen. Kennen wir eine der unendlich vielen, so kennen wir alle, denn die $(n-1)$-ten Sylvester'schen Matrices sind alle einander ähnlich mit dem Proportionalitätsfactor 1.

Entspricht die eine Determinante den Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$, so entspricht jede andere zwei Gleichungen von der Form $\lambda_1 f + \mu_1 \varphi = 0$ und $\lambda_2 f + \mu_2 \varphi = 0$, wo $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = 1$ der Proportionalitätsfactor zwischen den ähnlichen Matrices ist.

Alle solche Paare von Gleichungen haben also dieselbe Bézout'sche Determinante und eben in dieser Combinanteneigenschaft liegt die Wichtigkeit der letzteren.

Da die n^2 Grössen $r_{i\varkappa}$ also eigentlich von $(2n-1)$ unabhängigen Grössen abhängen, so bestehen zwischen ihnen eine Anzahl Relationen. Solche sind z. B. die linearen Relationen, welche aus der Symmetrie folgen, nämlich:

$$r_{i\varkappa} = r_{n-\varkappa+1,\ n-i+1}$$

und die bekannten Relationen $(n-1)$ten Grades

$$\begin{matrix} R_i & R_{i+h} \\ \varkappa & \varkappa \pm h \end{matrix}$$

Weitere Relationen ergeben sich aus der Gestalt der adjungierten Determinante Γ. Man hat nämlich nach einem allgemeinen Satze [1])

$$R_{\substack{i_1\, i_2 \cdots i_v \\ \varkappa_1\, \varkappa_1 \cdots \varkappa_v}} = \frac{(-1)^\varrho}{R^{v-1}} \Gamma_{\substack{i_{v+1},\, i_{v+2},\, \cdots i_n \\ \varkappa_{v+1},\, \varkappa_{v+2},\, \cdots \varkappa_n}}$$

wo $\varrho = \sum_1^v i_\sigma + \sum_1^v \varkappa_\tau$ ist.

Insbesondere folgt:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{1\varkappa} \\ r_{i1} & r_{i\varkappa} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\varkappa+i}}{R^{n-2}} \Gamma_{\substack{1\, i \\ 1\, \varkappa}}$$

und ebenso

$$\begin{vmatrix} r_{i-1,\,\varkappa-1} & r_{i-1,\,n} \\ r_{n,\;\;\varkappa-1} & r_{n,\,n} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\varkappa+i}}{R^{n-2}} \Gamma_{\substack{i-1,\,n \\ \varkappa-1,\,n}}$$

oder da Γ und Σ identisch sind nach Formel (42)

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{1\varkappa} \\ r_{i1} & r_{i\varkappa} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{i-1,\,\varkappa-1} & r_{i-1,\,n} \\ r_{n,\;\;\varkappa-1} & r_{n,\,n} \end{vmatrix} \tag{54}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (53') kann man nun die früher erwähnte umgekehrte Rechnung vornehmen; d. h. aus den $(2n-1)$ Grössen $\pm \sum_\varkappa R_i = \gamma_{n-i+\varkappa}$ die n^2 Grössen $r_{i\varkappa}$ und aus diesen die $(2n+2)$ unabhängigen Coefficienten unter den $(2n+2)$ Coefficienten a_l, b_m berechnen. Aus den Coefficienten haben wir die $r_{i\varkappa}$ und aus diesen die γ_h eindeutig bestimmt. Wenn man überhaupt die jetzt vorzunehmende Rechnung führen kann, so bleiben noch zwei Fragen zu erledigen, erstens da man bei der Berechnung der Coefficienten bloss einen Teil der aus den γ_h abgeleiteten $r_{i\varkappa}$ in betracht zieht, ob die übrigen $r_{i\varkappa}$ diejenigen sind, welche durch die erhaltenen Coefficienten bestimmt sein würden, zweitens ob die Bestimmung der Coefficienten eine eindeutige ist.

Was die Berechnung der $r_{i\varkappa}$ angeht, so ist nach dem bekannten allgemeinen Satze:

1) Baltzer, S. 58. Gordan, S. 93.

$$r_{i\varkappa} = \frac{(-1)^{i+\varkappa}}{R^{n-2}} \Gamma_{\substack{i \\ \varkappa}}$$

wo $R^{n-1} = \Gamma$ ist. Jedes $r_{i\varkappa}$ wird durch die beliebig gegebenen γ_h eindeutig bestimmt.

Zweitens kann man aus den Gleichungen (53′) die Coefficienten a_l, b_m ebenfalls eindeutig berechnen, wenn man zuerst drei derselben willkürlich festsetzt.

Wählt man z. B. feste Werte für die drei Grössen a_0, b_0, a_n so wird durch die erste Gleichung ($\varkappa = 1$) b_n eindeutig bestimmt, dann aus den beiden Gleichungen:

$$r_{1\varkappa} = \begin{vmatrix} a_{\varkappa-1} & a_n \\ b_{\varkappa-1} & b_n \end{vmatrix}$$

und

$$r_{n-\varkappa+2,1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{\varkappa-1} \\ b_0 & b_{\varkappa-1} \end{vmatrix}$$

unter der Voraussetzung[1]) $r_{11} \gtrless 0$ lassen sich die allgemeinen Coefficienten $a_{\varkappa-1}$, $b_{\varkappa-1}$ ebenfalls eindeutig berechnen.

Es bleibt nur noch zu beweisen, dass die $(n-1)^2$ übrigen $r_{i\varkappa}$ gerade diejenigen sind, welche durch die eben berechneten Coefficienten bestimmt sind. Man bezeichne die aus den γ_h berechneten Elemente mit $r'_{i\varkappa}$, mit $r_{i\varkappa}$ diejenigen, welche durch die a_l, b_m bestimmt sind.

Dann folgt aus der Methode selbst

$$r_{1\varkappa} = r'_{1\varkappa} \qquad r_{i1} = r'_{i1}$$

Aus der Symmetrie von Γ folgt ferner

$$r'_{i\varkappa} = r'_{n\ \varkappa+1,\, n-i+1}$$

und da bekanntlich

$$r_{i\varkappa} = r_{n-\varkappa+1,\, n-i+1}$$

so ist ferner

$$r_{\varkappa n} = r'_{\varkappa n}$$

und

$$r_{ni} = r'_{ni}\,.$$

---

1) Ist $r_{11} = 0$, so brauchen wir nur von einem nicht verschwindenden Element $r_{1\varkappa}$, r_{i1} auszugehen. Seite 117.

Die Relation (54) wurde aus der Gestalt von Γ abgeleitet, ganz unabhängig von den speciellen Werten der γ_h; also gilt sie ebensogut für die $r'_{i\varkappa}$ als für die $h_{i\varkappa}$.

Setzt man in (54) $i = 2$ so folgt bei Ausmultiplication

$$r_{11}\, r_{2\varkappa} - r_{21}\, r_{1\varkappa} = r_{1,\varkappa-1}\, r_{nn} - r_{n,\varkappa-1}\, r_{1,n}$$

oder mit Hilfe der obigen Relationen

$$r'_{11}\, r_{2\varkappa} - r'_{21}\, r'_{1\varkappa} = r'_{1\,\varkappa-1}\, r'_{nn} - r'_{n,\varkappa-1}\, r'_{1n}.$$

Vergleicht man hiermit die Formel in den $r'_{i\varkappa}$,

$$r'_{11}\, r'_{2\varkappa} - r'_{21}\, r'_{1\varkappa} = r'_{1\,\varkappa-1}\, r'_{nn} - r'_{n,\varkappa-1}\, r'_{1n}$$

so erkennt man, dass $r_{11}\,(r_{2\varkappa} - r'_{2\varkappa}) = 0$ und da nach Voraussetzung $r_{11} \gtrless 0$, so ist

$$r_{2\varkappa} = r'_{2\varkappa} \qquad \text{u. s. w.}$$

Satz XXIV. Die drei Grössensysteme der $(2n+2)$ a_l, b_m, der n^2 $r_{i\varkappa}$, der $(2n-1)$ γ_h hängen folgendermassen zusammen: Die a_l, b_m sind von einander unabhängig, und aus denselben lassen sich die sämtlichen $r_{i\varkappa}$ und γ_h eindeutig berechnen. Dabei treten die $(2n+2)$ a_l, b_m in solchen Verbindungen auf, dass die Resultate nur von $(2n-1)$ von einander unabhängigen Grössen abhängen.

Alle ähnlichen $(n-1)$-ten Sylvester'schen Matrices mit dem Proportionalitätsfactor Eins liefern nämlich ein und dasselbe System der $r_{i\varkappa}$. Die Elemente einer solchen Matrix sind erst dann eindeutig bestimmt, wenn man die Werte von drei Elementen einer der von Null verschiedenen Determinanten festsetzt, wenn man z. B. eine Normalform auszeichnet.

Umgekehrt sind die $(2n-1)$ Grössen γ_h von einander unabhängig, und man kann aus denselben erstens die n^2 $r_{i\varkappa}$ und zweitens aus diesen $(2n-1)$ der Grössen a_l, b_m als Functionen der drei übrigen, d. h. eine der unter einander ähnlichen Matrices $S^{(n-1)}$ eindeutig berechnen. Mit anderen Worten die n^2 Grössen $r_{i\varkappa}$ sind nicht von einander unabhängig, aber jedem System derselben, welches aus irgend einem System der a_l, b_m entsteht, entsprechen eine Reihe von unter einander ähnlichen Matrices, bei denen

der Proportionalitätsfactor gleich Eins ist. Jedem System der $r_{i\varkappa}$, welches aus irgend einem System der a_l, b_m entsteht, entspricht ein System der γ_h.

Zu Seite 115 Fussnote:

Es sei $r_{11} = r_{nn} = 0$; dann ist $r_{1\varkappa} = r_{n-\varkappa+1,n} \gtrless 0$ oder $r_{n,n-\varkappa+1} = r_{\varkappa_1} \gtrless 0$ wo $\varkappa < n$; denn wäre $r_{1\varkappa} = 0$ und $r_{\varkappa_1} = 0$, $\varkappa = 1, 2, \cdots (n-1)$, so würde aus (53') folgen: $a_0 : b_0 = a_n : b_n = a_1 : b_1$ also $r_{n1} = r_{1n} = 0$ und $R = 0$.

Sei also $r_{1,h+1} \gtrless 0$. Aus den Gleichungen

$$r_{1\varkappa} = \begin{vmatrix} a_{\varkappa-1} & a_n \\ b_{\varkappa-1} & b_n \end{vmatrix} \text{ und } r_{n-h+1,\varkappa} - r_{n-h,\varkappa-1} = \begin{vmatrix} a_{\varkappa-1} & a_h \\ b_{\varkappa-1} & b_h \end{vmatrix}$$

nach willkürlicher Festsetzung der Grössen a_n, b_n, a_h, lassen sich die übrigen a_l, b_m eindeutig berechnen.

Dann haben wir wie vorhin: $r_{1\varkappa} = r'_{1\varkappa}$, $r_{in} = r'_{in}$; und ausserdem $r_{n-h+1,\varkappa} - r_{n-h,\varkappa-1} = r'_{n-h+1,\varkappa} - r'_{n-h,\varkappa-1}$. Aus der Relation (54) folgt, da $r_{11} = r_{nn} = 0$, bei $\varkappa = n$, $r_{i1} = r'_{i1}$, $r_{n\varkappa} = r'_{n\varkappa}$.

Nun müssen wir auch die analoge Relation anwenden:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{i\varkappa} \\ r_{21} & r_{22} & r_{2\varkappa} \\ r_{i1} & r_{i2} & r_{i\varkappa} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{1,\varkappa-1} & r_{1,n} \\ r_{i-1,1} & r_{i-1,\varkappa-1} & r_{i-1,n} \\ r_{n1} & r_{n,\varkappa-1} & r_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{i-2,\varkappa-2} & r_{i-2,n-1} & r_{i-2,n} \\ r_{n-1,\varkappa-2} & r_{n-2,n-1} & r_{n-1,n} \\ r_{n,\varkappa-2} & r_{n,n-1} & r_{n,n} \end{vmatrix}$$

d. h.

$$-r_{12}\begin{vmatrix} r_{21} & r_{2\varkappa} \\ r_{i1} & r_{i\varkappa} \end{vmatrix} + r_{1\varkappa}\begin{vmatrix} r_{21} & r_{22} \\ r_{i1} & r_{i2} \end{vmatrix} = r_{i-1,1}\, r_{n,\varkappa-1}\, r_{1,n} +$$

$$r_{n,1}\, r_{1,\varkappa-1}\, r_{i-1,n} - r^2_{n,1}\, r_{i-1,\varkappa-1} = r_{n,\varkappa-2}\begin{vmatrix} r_{i-2,n-1} & r_{i-2,n} \\ r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \end{vmatrix} -$$

$$r_{n,n-1}\begin{vmatrix} r_{i-2,\varkappa-2} & r_{i-2,n} \\ r_{n-1,\varkappa-2} & r_{n-1,n} \end{vmatrix} \text{ wo } i, \varkappa = 3, 4, \cdots 0.$$

Fünftes Kapitel.

Beziehungen zwischen den zweiten Unterdeterminanten von R und den vierten von S.

1. Einleitung.

Im vorigen Kapitel haben wir bewiesen, dass nicht nur die Bézout'sche Determinante R und die Sylvester'sche Determinante S einander gleich sind, sondern, dass auch jede erste Unterdeterminante von R gleich einer von $(4n-2)$ zweiten Unterdeterminanten von S ist, nämlich gleich einer der $(2n-1)$ verschiedenen Determinanten der in S zweimal enthaltenen Matrix S'. Dieser Satz enthält von einem etwas anderen Gesichtspunkt betrachtet gewisse einfache lineare Relationen zwischen den ersten Unterdeterminanten von R.

Bei den höheren Unterdeterminanten werden die Beziehungen beträchtlich complicierter; schon bei den zweiten Unterdeterminanten von R findet unsere Umkehrungsmethode nicht mehr allgemeine Anwendung. Deshalb entwickeln wir zuerst eine andere Methode, welche in Verbindung mit der früheren eine vollständige Behandlung dieser Unterdeterminanten ermöglicht. Es wird sich ergeben, dass gewisse derselben gleich gewissen Determinanten der zweiten Sylvester'schen Matrix sind; dass alle anderen gleich Summen von Determinanten der genannten Sylvester'schen Matrix sind.

Es werden sich dabei unter Anderem gewisse lineare Relationen zwischen den zweiten Unterdeterminanten von R herausstellen[1]).

Obwohl unsere Methoden weiterer Anwendung fähig sein dürften, beschränken wir uns auf den eben genannten Fall der zweiten Unterdeterminanten von R und der vierten von S.

2. Allgemeine Methode.

Schon bei einer anderen Gelegenheit (Seite 114) haben wir die allgemeine Relation zwischen den Unterdeterminanten von R und denen der adjungierten Determinante Γ erwähnt. Es ist nun insbesondere

1) Solche Relationen für Unterdeterminanten einer allgemeinen symmetrischen Matrix sind von Kronacher (Monatsber. der Berl. Acad. 1882) abgeleitet worden.

$$R_{\substack{i_1\ i_2\\ \varkappa_1\ \varkappa_2}} = \frac{(-1)^v}{R^{2-1}}\, \Gamma_{\substack{i_3\ i_4\ \cdots\ i_n\\ \varkappa_3\ \varkappa_4\ \cdots\ \varkappa_n}}$$

d. h. mit Hilfe der Formel (49')

$$R_{\substack{i_1\ i_2\\ \varkappa_1\ \varkappa_2}} = \frac{(-1)^v}{R}\begin{vmatrix} \gamma_{i_1\varkappa_1} & \gamma_{i_1\varkappa_2} \\ \gamma_{i_2\varkappa_1} & \gamma_{i_2\varkappa_2}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^v}{R}\begin{vmatrix} \gamma_{n-i_1+\varkappa_1} & \gamma_{n-i_1+\varkappa_2} \\ \gamma_{n-i_2+\varkappa_1} & \gamma_{n-i_2+\varkappa_2}\end{vmatrix} \qquad (54')$$

wo $v = i_1 + i_2 + \varkappa_1 + \varkappa_2$.

Da die Grössen γ_i der Reihe nach gleich den σ_i des dritten Kapitels sind, so folgt aus der Formel (44), da die vorliegenden Indices der Bedingung

$$(n-i_1+\varkappa_1)+(n-i_2+\varkappa_2) = (n-i_1+\varkappa_2)+(n-i_2+\varkappa_1)$$

genügen, und $(-1)^v = (-1)^{n-i_2+\varkappa_1+n-i_1+\varkappa_2}$,

$$R_{\substack{i_1\ i_2\\ \varkappa_1\ \varkappa_2}} = \lambda\left[S''_{\overline{n-i_2+\varkappa_1,\, n-i_1+\varkappa_2-1}} + \right. \qquad (55)$$

$$\left. S''_{\overline{n-i_2+\varkappa_1+1,\, n-i_1+\varkappa_2-2}} + \cdots + S''_{\overline{n-i_1+\varkappa_1-1,\, n-i_2+\varkappa_2}}\right]$$

Ist aber $n-i_1+\varkappa_1 > n-i_2+\varkappa_2$ d. h. ist $i_2-i_1 > \varkappa_2-\varkappa_1$, so schliesst die Reihe mit dem Gliede $S_{\overline{n-i_2+\varkappa_2-1,\, n-i_1+\varkappa}}$, indem alle folgenden Glieder sich gegen einander aufheben. Diese Formel ist bis auf den Factor λ, welchen wir im folgenden Paragraphen bestimmen werden, der endgiltige Ausdruck für jede zweite Unterdeterminante von R als Summe vierter Unterdeterminanten von S. So haben wir z. B. bei $n=4$

$$R_{\substack{1\ 2\\ 1\ 2}} = \lambda\, S''_{\overline{3\,4}}$$

$$R_{\substack{1\ 4\\ 2\ 3}} = \lambda\, S''_{\overline{2\,5}}$$

$$R_{\substack{2\ 4\\ 1\ 4}} = \lambda\left[S''_{\overline{1\,5}} + S''_{\overline{2\,4}}\right]$$

3. Specielle Methode für gewisse Unterdeterminanten von R und von S.

Wir haben im Vorigen bewiesen, dass jede zweite Unterdeterminante bis auf einen Proportionalitätsfactor, welcher bei allen derselbe ist, gleich der Summe gewisser Determinanten der zweiten Sylvester'schen Matrix ist. Der Beweis beruhte

auf den vorher bewiesenen Relationen zwischen den ersten Unterdeterminanten von R und den Determinanten der ersten Sylvester'schen Matrix.

Wir wenden nun die im vierten Kapitel benützte Methode auf die zweiten Unterdeterminanten von R an, nennen dieselbe dabei eine specielle, da sie sich nur auf einen Teil der zweiten Unterdeterminanten überhaupt anwenden lässt. Da sie aber keinen unbestimmten Proportionalitätsfactor einführt, so wird die Unbestimmtheit der früheren allgemeinen Resultate aufgehoben. Es folgt aus der allgemeinen Formel (47)

$$R_{\substack{i_1\ i_2\\ \varkappa_1\ \varkappa_2}} = \Delta^{(r,s)}_{i_1,\,i_2} \times S^{(r,s)}_{\varkappa_1,\,\varkappa_2}$$

und es ist nun die Frage, in welchen Fällen der Transformationssatz sich auf dieses Product anwenden lässt. Wir erinnern uns zunächst, dass die Anwendung dieses Satzes bei den ersten Unterdeterminanten nur dadurch möglich war, dass bei der Auslassung einer von zwei Colonnen von $\Delta^{(r,s)}$, nämlich der s-ten oder der $(s+1)$ ten, eine Matrix mit zwei Nullenzeilen entstand, welche abgesehen von diesen Zeilen selbst die Gestalt eines $\Delta^{(r,s)}$ besass, d. h. durch Umkehrung eine correspondierende Matrix lieferte. Durch geeignete Wahl von S konnten wir demnach jede beliebige Unterdeterminante behandeln.

Nun tritt aber nach dem Satz XX die Bedingung auf, dass i_1 und i_2 aufeinander folgende Zahlen sein müssen, was auch r und s sein mögen; dass dann $s = i_1+1$, $s = i$, oder $s = i_1-1$ sein kann, eine Willkür aber, welche keinen Wert besitzt. Es folgt nun aus Formel (47) mit Hilfe von (37) und (40)

$$R_{\substack{i,\,i+1\\ \varkappa_1,\,\varkappa_2}} = \begin{cases} \Delta^{(n-i-1,\,i+1)}_{i,\,i+1} \times S^{(n-i-1,\,i+1)}_{\varkappa_1,\,\varkappa_2} \\ \qquad = \Delta^{(n-i-1,\,i+1)}_{\substack{n-1,\,n,\,2n-1,\,2n\\ i,\,i+1}} \times S^{(n-i-1,\,i+1)}_{\substack{n-1,\,n,\,2n-1,\,2n\\ \varkappa_1,\,\varkappa_2}} \\ \Delta^{(n-i,\,i)}_{i,\,i+1} \times S^{(n-i,\,i)}_{\varkappa_1,\,\varkappa_2} \\ \qquad = \Delta^{(n-i,\,i)}_{\substack{1,\,n,\,n+1,\,2n\\ i,\,i+1}} \times S^{(n-i,\,i)}_{\substack{1,\,n,\,n+1,\,2n\\ \varkappa_1,\,\varkappa_2}} \\ \Delta^{(n-i+1,\,i-1)}_{i,\,i+1} \times S^{(n-i+1,\,i+1)}_{\varkappa_1,\,\varkappa_2} \\ \qquad = \Delta^{(n-i+1,\,i-1)}_{\substack{1,\,2,\,n+1,\,n+2\\ i,\,i+1}} \times S^{(n-i+1,\,i-1)}_{\substack{1\,2n+1,\,n+2\\ \varkappa_1,\,\varkappa_2}} \end{cases}$$

$$= \Delta^{(n-i-1,\,i-1)}_{(n,\,2)} \times S''^{(n-i-1,\,i-1)}_{\varkappa_1,\,\varkappa_2}$$

Auf dieses Product lässt sich der Transformationssatz anwenden; zu

$$\Delta^{(n-i-1,\,i-1)}_{(n,\,2)}$$

correspondiert nämlich nach (46) ihre Umkehr

$$S_{\overline{n-i,\,n-i+1,\,\cdots\,2n-i-3}}\,(n,2) = S''_{\overline{n-i,\,n-i+1,\,\cdots\,2n-i-1}}$$

Also folgt:

$$R_{\substack{i,\,i+1\\ \varkappa_1,\,\varkappa_2}} = \varrho \left| S''^{(n-i-1,\,i-1)}_{\varkappa_1,\,\varkappa_2}\, S''_{n-i,\,\cdots\,\overline{2n-i-1}} \right|$$

wo nach (46) $\varrho = (-1)^{(n-i-1)i} = (-1)^{ni}$ ist.

Die Indices derjenigen Colonnen von S'', welche in der neuen Determinante vorkommen, sind der Reihe nach

$$n-i,\ \cdots\ n-i+\varkappa_1-2,\, n-i+\varkappa_1,\ \cdots\ n-i+\varkappa_2-2,\, n-i+\varkappa_2,$$
$$\cdots\ 2n-i-1\,;\ 1,2,\ \cdots\ n-i-1,\, 2n-i,\ \cdots\ 2n.$$

Es fehlen die Indices $(n-i+\varkappa_1-1)$ und $(n-i+\varkappa_2-1)$. Wenn wir diese Colonnen gut ordnen, so tritt noch der Factor

$$(-1)^{(n-2)(n-i-1)} = (-1)^{ni}$$

hinzu, und es ist endlich

$$R_{\substack{i,\,i+1\\ \varkappa_1,\,\varkappa_2}} = S''_{\overline{n-i+\varkappa_1-1,\,n-i+\varkappa_2-1}} \qquad (56)$$

oder nach (35)

$$R_{\substack{i,\,i+1\\ \varkappa_1,\,\varkappa_2}} = S_{\substack{1,\,2,\,n+1,\,n+2\\ 1,\,2,\,n-i+\varkappa_1+1,\,n-i+\varkappa_1+2}} =$$

$$S_{\substack{1,\,n,\,n+1,\,2,\,n\\ 1,\,n-i+\varkappa_1,\,n-i+\varkappa_2,\,2n}} = S_{\substack{n-1,\,n,\,2n-1,\,2n\\ n-i+\varkappa_1-1,\,n-i+\varkappa_2-1,\,2n-1,\,2n.}}$$

Beispiel: Es sei

$$n = 4,\ i_1 = 2,\ i_2 = 3,$$
$$\varkappa_1 = 1,\ \varkappa_3 = 3.$$

Es ist dann $s = i_1 - 1 = 1$, oder $s = i_1 = 2$, oder $s = i_1 + 1 = 3$; d. h. wir können von dem zweiten, dritten oder vierten der fünf Producte auf S. 97 ausgehen.

Der Kürze halber führen wir die Rechnung bloss für das erste dieser 3 Producte aus. Dann ist

$$R_{\substack{2\,3\\1\,3}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -b_0 \\ b_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_0 \\ -a_4 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \\ a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \\ b_4 & 0 \\ b_3 & 0 \\ b_2 & b_4 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -b_0 & . & a_2 & a_4 \\ b_4 & 0 & . & a_1 & a_3 \\ 0 & a_0 & . & b_2 & b_4 \\ -a_4 & 0 & . & b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \varrho \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_0 & 0 \\ a_1 & a_3 & 0 & a_4 \\ b_2 & b_4 & b_0 & 0 \\ b_1 & b_3 & 0 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_2 & b_4 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

oder abgekürzt, mit Hilfe der Formeln (47), (37), (40)

$$R_{\substack{2\,3\\1\,3}} = \Delta^{(3,1)}_{\overline{2\,3}} \times S^{(3,1)}_{\overline{1\,3}} = \Delta^{(3,1)}_{\substack{1\,2\,5\,6\\2\,3}} \times S^{(3,1)}_{\substack{1\,2\,5\,6\\1\,3}}$$
$$= \Delta^{(1,1)}_{(4,2)} \times S''^{(1,1)}_{\quad 1\,3} = (-1)^2 \left| S''_{\overline{1\,2\,4\,6}} S''_{\overline{2\,3\,4\,5}} \right|$$
$$= S''_{\overline{2\,4}}$$

4. Zusammenfassung der beiden Methoden.

Bei der ersten Methode ergab sich eine Formel für jede beliebige zweite Unterdeterminante von R als Summe vierter Unterdeterminanten von S bis auf einen Proportionalitätsfactor, welcher jedesmal derselbe ist. Die zweite Methode gibt uns

nun specielle Formeln dieser Art ohne jede Unbestimmtheit, d. h. sie ergibt den Wert der Constanten λ. Setzen wir nämlich in der allgemeinen Formel (55) $i_1 = i$, $i_2 = i+1$, so folgt:

$$R_{\substack{i, i+1 \\ \varkappa_1 \varkappa_2}} = \lambda S''_{n-i+\varkappa_1-1,\, n-i+\varkappa_2-1}$$

Vergleichen wir diese Formel mit dem Resultat (56) der Seite 121, so erkennen wir, dass $\lambda = 1$ ist, und die allgemeine Formel nimmt folgende Gestalt an:

$$R_{\substack{i_1 i_2 \\ \varkappa_1 \varkappa_2}} = S''_{n-i_2+\varkappa_1,\, n-i_1+\varkappa_2-1} + S''_{n-i_2+\varkappa_1+1,\, n-i_1+\varkappa_2-2} + \cdots \quad (57)$$

zu μ Gliedern, wo μ die kleinere der beiden Differenzen $(\varkappa_2 - \varkappa_1)$ und $(i_2 - i_1)$ ist. Vergleichen wir nun die Formeln (54'), (55), (44), so sehen wir, dass $\lambda = \dfrac{1}{\varrho R}$ ist. Da nun $\lambda = 1$ ist, so folgt $\varrho = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{S}$, wie schon im dritten Kapitel behauptet wurde.

Es bleibt uns nur noch übrig, gewisse Folgerungen aus der Formel (57) abzuleiten. Erstens bemerken wir, dass bei $i_2 - i_1 = 1$ und bei $\varkappa_2 - \varkappa_1 = 1$ die rechte Seite der obigen Formel aus einem einzigen Glied besteht. Dann ist die Differenz der beiden Indices gleich $\varkappa_2 - \varkappa_1 + i_2 - i_1 - 1$, d. h. gleich $\varkappa_2 - \varkappa_1$ oder gleich $i_2 - i_1$, also jedenfalls kleiner als n.

Mit anderen Worten: es sind solche und nur solche Determinanten $S''_{\alpha,\beta}$ gleich je einer Bézout'schen Determinante, bei denen $\beta - \alpha < n$ ist. Zweitens folgen aus der allgemeinen Formel oder aus Formel (43)

$$R_{\substack{i_1 i_2 \\ \varkappa_1 \varkappa_2}} - R_{\substack{i_1 i_2-1 \\ \varkappa_1 \varkappa_2-1}} = S''_{n-i_2+\varkappa_1,\, n-i_1+\varkappa_2-1} \quad (58)$$

eine Reductionsformel, welche vermöge der Identität $R_{\substack{i_1 i_1 \\ \varkappa_1 \varkappa_1}} = 0$, die allgemeine Formel enthält. Aus derselben folgt ferner, dass jede Determinante der zweiten Sylvester'schen Matrix gleich der Differenz zweier zweiten Unterdeterminanten von R ist.

Analog lässt sich die Reductionsformel ableiten:

$$R_{\substack{i_1 i_2 \\ \varkappa_1 \varkappa_2}} - R_{\substack{i_1+1, i_2 \\ \varkappa_1+1, \varkappa_2}} = S''_{n-i_2+\varkappa_1,\, n-i_1+\varkappa_2-1}$$

Drittens folgt aus den beiden Reductionsformeln oder direct aus der Formel

$$R\begin{matrix} i_1+1,\ i_2 \\ \varkappa_1+1,\ \varkappa_2 \end{matrix} = R\begin{matrix} i_1,\ i_2-1 \\ \varkappa_1,\ \varkappa_2-1 \end{matrix}$$

oder allgemein

$$R\begin{matrix} i_1\ i_2 \\ \varkappa_1\ \varkappa_2 \end{matrix} = R\begin{matrix} i_1+h,\ i_2+h \\ \varkappa_1+h, \varkappa_2+h, \end{matrix}$$

so lange alle Indices zwischen 1 und n noch liegen.

Viertens folgt aus der allgemeinen Formel oder direct aus der Symmetrie von R

$$R\begin{matrix} i_1\ i_2 \\ \varkappa_1\ \varkappa_2 \end{matrix} = R\begin{matrix} n-\varkappa_2+1,\ n-\varkappa_1+1 \\ n-i_2+1,\ n-i_1+1 \end{matrix}$$

Erinnern wir uns noch der Relation

$$R\begin{matrix} i_1\ i_2 \\ \varkappa_1\ \varkappa_2 \end{matrix} = \frac{(-1)^v}{R}\begin{vmatrix} \sigma_{n-i_1+\varkappa_1} & \sigma_{n\ -i_1+\varkappa_2} \\ \sigma_{n-i_2+\varkappa_1} & \sigma_{n-i_2+\varkappa_2} \end{vmatrix}$$

so lassen sich die betreffenden Beziehungen zwischen den dreierlei Grössen R, S, Γ oder Σ folgendermassen aussprechen.

Satz XXV. Bilden wir aus den $(2n-1)$ Elementen der Determinante Σ die bekannte Matrix Σ'' von zwei Zeilen und $(2n-2)$ Colonnen, so sind einerseits die Determinanten dieser Matrix proportional denjenigen vierten Unterdeterminanten von S, welche der zweiten Sylvesterschen Matrix entnommen sind. Formel von S. 89. Andererseits sind sämtliche zweite Unterdeterminanten von R proportional gewissen Summen dieser Determinanten von Σ''. Formel (55).

Drittens ist jede zweite Unterdeterminante von R gleich der Summe gewisser vierter Unterdeterminanten von S. Formel (55).

Endlich ist jede Determinante der zweiten Sylvesterschen Matrix gleich, und demnach jede Determinante der Matrix Σ'' proportional einzelnen zweiten Unterdeterminanten von R oder der Differenz zweier derselben. Formeln (58).

Satz XXVI. Zwischen den genannten Unterdeterminanten von R bestehen zweierlei lineare Relationen. Erstens ist

$$R\begin{matrix} i_1 & i_2 \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 \end{matrix} \qquad R\begin{matrix} i_1+h, & i_2+h \\ \varkappa_1+h, & \varkappa_2+h \end{matrix}$$

wo h irgend eine ganze Zahl ist, für welche die vier Indices an der rechten Seite zwischen 1 und n inclusive liegen.

Zweitens wegen der Symmetrie von R ist

$$R\begin{matrix} i_1 & i_2 \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 \end{matrix} = R\begin{matrix} n-\varkappa_2+1, & n-\varkappa_1+1 \\ n-i_2+1, & n-i_1+1. \end{matrix}$$

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Beziehungen zwischen Systemen linearer Gleichungen und Matrices.

1. Einleitung, Litteratur.
2. Voraussetzungen und Bezeichnung.
   Minoren einer Matrix.
   Determinanten einer Matrix.
   Entsprechende Reihen und entsprechende Determinanten zweier Matrices.
   Verschwinden einer Matrix.
   Lineare Verbindung.
   Unabhängigkeit linearer Gleichungen, linearer Verbindungen, Wertsysteme.
   Auflösbarkeit eines Systems linearer Gleichungen.
3. Wertsysteme, welche einem System linearer Gleichungen genügen.
   Nachweis eines Wertsystems.
   Matrix der Coefficienten und Matrix der Wertsysteme.
   Darstellung gewisser n Unbekannten als lineare Verbindungen der $(m-n)$ übrigen.
   Beweis, dass die Matrix der Wertsysteme mindestens $(m-n)$ Zeilen enthält.
   Beweis, dass diese Matrix nicht mehr als $(m-n)$ Zeilen enthält.
4. Ähnliche und Normalmatrices.
   Allgemeine Wertsystemematrix.
   Gegenseitige Beziehung zwischen zwei Wertsystemematrices.
   Definition von Ähnlichkeit.
   Proportionalität von entsprechenden Determinanten zweier ähnlichen Matrices.
   Gruppen von einander ähnlichen Matrices.
   Repräsentant einer Gruppe.
   Definition von Normalmatrices.
   Sätze I, II, III.

5. **Correspondierende Matrices.**

Gleichungssysteme mit ähnlichen Coefficientenmatrices.
Correspondenz zwischen den Matrices zweier Gruppen.
Proportionalität correspondierender Determinanten.
Bestimmung einer correspondierenden Matrix.
Zweiter Beweis, dass die Matrix der Wertsysteme nicht mehr als $(m—n)$ Colonnen enthalten kann.

Sätze IV, V, VI.

6. **Multiplication von Matrices.**

Definition.
Darstellung von Unterdeterminanten als Producte 2-er Matrices.
Multiplication 2-er Matrices und Zerlegung einer Determinante in ein Product 2-er Matrices mit Hilfe correspondierender Matrices.

Sätze VII, VIII, IX.

7. **Lineare Verbindung.**

Lineare Verbindung als Multiplication von Matrices.
Anwendung auf Systeme linearer Gleichungen.
Beziehungen zwischen correspondierenden Matrices und Elimination bei linearen Gleichungen.

Sätze X, XI, XII.

Zweites Kapitel.

Anwendung der vorigen Sätze auf gewisse Gleichungssysteme.

1. **Einleitung.**

Litteratur; Bézout, Sylvester etc.
Verschiedene Gesichtspunkte.

2. **Beziehungen zwischen den betreffenden Gleichungssystemen.**

Die Bézout'schen und die Sylvester'schen Gleichungen.
Die allgemeinen Gleichungen $Mf + N\varphi = 0$ als lineare Verbindungen der Sylvester'schen Gleichungen.
Die allgemeinen Systeme n-gliedriger Gleichungen mit derselben (Bézout'schen) Coefficientendeterminante.

Sätze XIII, XIV.

3. **Übergang zur Matrixtheorie.**

Coefficientenmatrix des Systems der allgemeinen Gleichungen $M_i f + N_i \varphi = 0$ als Product 2-er Matrices.
Specialisierung dieser Darstellung für gewisse Gleichungssysteme.
Darstellung der Bézout'schen Determinante R als Product 2-er Matrices.
Matrices, welche den Matrices gewisser Colonnen der Sylvester'schen Determinante S correspondieren.
Hinweisung auf eine reine Matrixtheorie.

Sätze XV, XVI.

Drittes Kapitel.

Formverhältnisse der Matrices.

1. **Einleitung.**
   Beziehungen zum 2. Kapitel.
2. **Umkehrung.**
   Die Matrix $\Delta^{(r,s)}$, welche derjenigen der ersten r und der letzten $(n-r)$ Colonnen von S correspondiert.
   Definition von Umkehrung und Umkehr.
   Schematische Zusammenstellung der zweierlei Matrices.
   Sätze XVII, XVIII.
3. **Die Sylvester'schen Matrices.**
   Definition.
   Sylvester'sche Unterdeterminanten.
   Umkehrung bei den Sylvester'schen Unterdeterminanten.
4. **Minoren der Matrices $\Delta^{(r,s)}$.**
   Minoren, welche Nullenzeilen enthalten.
   Umkehren dieser Minoren.
   Sätze XIX, XX.
5. **Matrices, welche den Sylvester'schen Matrices correspondieren.**
   Aufstellung der Matrices.
   Eigenschaften dieser Matrices.
   Beziehungen zwischen 2. und 4. Unterdeterminanten von S.
   Satz XXI.
6. **Die Bézout'sche Determinante.**
   Beziehung zu Determinanten von der Form Σ.
   Unterdeterminanten.
7. **Zusammenstellung der Formeln.**

Viertes Kapitel.

Relationen zwischen der Sylvester'schen und der Bézout'schen Determinante.

1. **Einleitung.**
   Resultate und Methoden von Jacobi und von Mansion.
2. **Beweis, dass die beiden Determinanten einander gleich sind.**
   Satz XXII.
3. **Die ersten Unterdeterminanten von R.**
   Verschiedene Productdarstellungen derselben.
   Transformation dieser Producte in zweite Unterdeterminanten von S.
   Der Jacobi'sche Satz.
   Die adjungierte Determinante von R.
   Bevorzugung der Determinanten der ersten Sylvester'schen Matrix.
   Ränderung.
   Umgekehrte Methode, d. h. Verwandlung einer 2. Unterdeterminante von S in erste von R.
   Satz XXIII.

4. Unabhängigkeit gewisser $(2n-1)$ Unterdeterminanten von R.
   Beziehungen zwischen den Elementen $r_{i\varkappa}$ von R, und den Elementen a_l, b_m von S (nach Jacobi).
   Willkür bei den letzteren.
   Relationen zwischen den $r_{i\varkappa}$, insbesondere 2. Grades.
   Berechnung der $r_{i\varkappa}$ aus den $R_{i\varkappa}$, d. h. aus den γ_h und zweitens der a_l, b_m aus den $r_{i\varkappa}$.
   Satz XXIV.

Fünftes Kapitel.

Beziehungen zwischen den 2-ten Unterdeterminanten von R und den 4-ten von S.

1. Einleitung.
   Notwendigkeit einer anderen Methode als im Kapitel IV.
2. Allgemeine Methode.
   Darstellung einer 2-ten Unterdeterminante von R durch erste Unterdeterminanten.
   Reduction auf eine Summe 4-ter Unterdeterminanten von S mit Hilfe des Kapitels III.
   Unbestimmter Proportionalitätsfactor.
3. Specielle Methode.
   Anwendung der Methode von Kapitel IV auf gewisse Unterdeterminanten.
   Reduction einer 2-ten Unterdeterminante von R auf eine 4-te von S, ohne unbestimmten Proportionalitätsfactor.
4. Zusammenfassung der beiden Methoden.
   Bestimmung des Proportionalitätsfactors.
   Darstellung einer beliebigen 2-ten Unterdeterminante von R als Summe 4-ter Unterdeterminanten von S.
   Darstellung gewisser 4-ter Unterdeterminanten von S als Differenzen 2-ter Unterdeterminanten von R.
   Lineare Relationen zwischen den letzteren.
   Sätze XXV, XXVI.

Berichtigungen.

S. 4	Z. 11 v. u.	lies	S. 10	statt	S. 42.
S. 8	Z. 1 v. o.	„	S. 7	„	S. 39.
S. 10	Z. 16 v. u.	„	S. 8	„	S. 40.
S. 14	Fussnote	„	S. 12	„	S. 44.
S. 43	Z. 1 v. o.	„	S. 13 f.	„	S. 4.
S. 48	Z. 12 v. o.	„	b_0	„	b^0.

Redacteur:
Dr. Bernhard Spatz
Karlstrasse 8.

Verlag:
J. F. Lehmann
Landwehrstrasse 12.

MÜNCHENER MEDICINISCHE WOCHENSCHRIFT

(ÄRZTLICHES INTELLIGENZ-BLATT)

ORGAN FÜR AMTLICHE UND PRAKTISCHE ÄRZTE.

Herausgegeben von

Dr. Bollinger, Dr. Heineke, Dr. G. Merkel, Dr. Michel, Dr. H. Ranke, Dr. v. Schleiss, Dr. Seitz, Dr. Winckel.

Die Münchener medicinische Wochenschrift bietet, unterstützt durch hervorragende Mitarbeiter, eine vollständige Uebersicht über die Leistungen und Fortschritte der gesammten Medicin, sowie über alle die Interessen des ärztlichen Standes berührenden Fragen.

Sie erreicht dies in erster Linie durch zahlreiche werthvolle **Originalarbeiten.** Im Laufe der letzten Jahre wurden Originalbeiträge gebracht aus folgenden Universitätskliniken und -Instituten:

Berlin: Chirurg. Klinik.
Bonn: Medicin. Poliklinik.
Breslau: Path.-anat. Institut
Erlangen: Medicin. Klinik, Chirurg. Klinik, Gynäkolog. Klinik, Augenklinik, Medicin. Poliklinik, Physiolog. Institut, Patholog.-anat. Institut.
Freiburg: Medic. Klinik, Chirurg. Klinik, Gynäkolog. Klinik, Psychiatrische Klinik, Ophthalmolog. Klinik, Medicin. Poliklinik, Patholog.-anat. Institut, Hygienisches Institut.
Giessen: Medicin. Klinik, Chirurg. Klinik, Path.-anat. Institut.
Greifswald: Chir. Klinik.
Halle a. S.: Med. Klinik, Frauen-Klinik, Hygien. Institut.
Heidelberg: Med. Klinik, Amb. Klinik f. Kehlkopf-, Nasen- u. Rachenkrankh.
Jena: Medicin. Klinik.
Königsberg: Path.-an. Inst.
Leipzig: Medicin. Klinik, Chirurg. Klinik.
München: Medicin. Klinik, Chirurg. Klinik, Frauenklinik, Augenklinik, Kinderklinik, Chirurg. Poliklinik, Pädiatr. Poliklinik, Medicin.-klin. Institut, Histiolog. Laboratorium, Patholog. Institut,
München: Hygien. Institut.
Strassburg: Ophthalmolog. Klinik.
Tübingen: Medicin. Klinik. Chirurg. Klinik.
Würzburg: Medicin. Klinik, Chirurg. Klinik, Frauenklinik, Ophthalmolog. Klinik, Syphilido-Klinik, Otiatrische Poliklinik, Amb. f. Nasen-, Rachen- und Kehlkopfkrankh. Path.-anat. Institut, Hygienisches Institut, Pharmakolog. Institut.
Amsterdam: Hyg. Institut.
Krakau: Medicin. Klinik.
Zürich: Medicin. Klinik, Psychiatrische Klinik.

Die Münch. medicin. Wochenschrift bringt ferner **Referate** und **Besprechungen** aller wichtigen Erscheinungen der medicinischen Literatur, sowie **Berichte** über die Verhandlungen der bedeutenderen ärztlichen Congresse und Vereine. Durch die Vollständigkeit und Promptheit ihrer Berichterstattung zeichnet sich die Münchener med. Wochenschrift vor allen anderen medicinischen Blättern aus.

Mittheilungen aus der Praxis, Feuilletons, therapeutische und tagesgeschichtliche Notizen, Universitäts- und Personal-Nachrichten, ärztl. Vacanzen etc. geben ferner dem Inhalte der Münch. med. Wochenschr. eine unübertroffene Vielseitigkeit.

Eine Gratis-Beilage zur Münch. med. Wochenschr. bildet die **„Galerie hervorragender Aerzte und Naturforscher"**; bisher erschienen die Porträts von Koch, v. Nussbaum, Lister, v. Pettenkofer.

Die Münch. med. Wochenschrift hat ihren Abonnentenkreis in Zeit von 4 Jahren mehr als verdoppelt (Aufl. z. Z. 2500) und täglich dehnt sich der Leserkreis noch aus, was wohl der beste Beweis für die Gediegenheit des Blattes ist. Ihr Preis beträgt franco unter Band 5 M., Bestellungen nimmt der Verleger wie alle Buchhandlungen und Postämter entgegen. — Studenten-Abonnements zum ermässigten Preis von M. 3.— (excl. Porto) nur durch den Verleger.

Probenummern stehen gratis und franco zur Verfügung.

J. F. Lehmann, med. Buchhandlung,
München, Landwehrstr. 12.